

# 多层地基上轴对称受荷弹性圆板问题

艾智勇, 梅阿敏, 董 洲

(同济大学 地下建筑与工程系, 教育部岩土及地下工程重点实验室 上海 200092)

**摘 要:**利用弹性圆板与多层地基表面的竖向位移协调条件与光滑接触条件,再由多层地基应力与位移的传递矩阵解,推导出多层地基上轴对称受荷弹性圆板问题的解析解。在此基础上,编制了相应的程序,并进行了数值计算。计算结果表明,圆板刚度对弹性圆板的位移以及圆板中心下的竖向应力有着较大的影响。

**关键词:**多层地基;弹性圆板;传递矩阵法;Hankel 变换;Hankel 逆变换

**中图分类号:**TU443 **文献标志码:**A **文章编号:**1674-4764(2009)01-0033-05

## Axisymmetric Loaded Elastic Circular Plate on Multi-Layered Soil

AI Zhi-yong, MEI A-min, DONG Zhou

(Department of Geotechnical Engineering, Key Laboratory of Geotechnical and Underground Engineering of the Ministry of Education, Tongji University, Shanghai 200092, P. R. China)

**Abstract:** An analytical solution of the elastic circular plate on multi-layered soil can be obtained by using the transfer matrix solutions for displacements and stresses of multi-layered soil. This solution is based on the continuity of vertical displacements and the smooth contact conditions between a multi-layered soil surface and the elastic circular plate. Numerical calculation and analysis are carried out by the computer program compiled for this purpose. The numerical results show that the rigidity of the elastic circular plate greatly influences the displacement of the circular plate and the normal stresses under the center of the circular plate.

**Key words:** multi-layered soil; elastic circular plate; transfer matrix method; Hankel transform; Hankel inverse transform

土木工程中信号塔、电视塔、储油仓库等结构物的基础常常为圆板基础,因此研究多层地基上轴对称受荷弹性圆板问题,具有较重要的理论和工程应用价值。由于地基土的复杂性,许多学者<sup>[1-3]</sup>基于不同的地基模型对圆板基础进行了分析研究。Hemsley<sup>[4]</sup>对文克尔地基模型上的圆板基础进行了分析研究。Vallabhan and Das<sup>[5]</sup>引入修正后的双参数地基模型,分析研究了双参数地基模型上的弹性圆板问题。Poulos<sup>[6]</sup>, Milovic<sup>[7]</sup>, Milovic and Diogo<sup>[8]</sup>等学者将地基看作有限厚度且具有刚性边

界的均匀弹性地层,在此基础上分析研究了该地基模型上弹性圆板基础的应力与变形问题。后来, Milovic<sup>[3]</sup>将地基看成两层,第 1 层为有限厚度,第 2 层为无限厚度,分析研究了双层地基模型上的弹性圆板问题。对于多层地基模型,Desai and Reese<sup>[9]</sup>考虑地基土应力-应变的非线性关系,采用有限单元法对多层地基上的圆板问题进行了分析研究。但是,有限单元法计算量大,求解过程复杂,不易于在实际工程中推广应用。Wang et al<sup>[10]</sup>等应用半解析半数值方法对多层地基上的板基础进行了研究与分

收稿日期:2008-09-26

基金项目:国家自然科学基金资助项目(50578121)

作者简介:艾智勇(1966-),男,同济大学副教授,博士,主要从事岩土及地下工程方面的研究工作,(E-mail) zhiyongai@tongji.edu.cn。

析,在他们的分析中,板的分析采用有限元法,而地基的分析采用解析法。袁聚云等<sup>[11]</sup>运用传递矩阵法分析了中心荷载下对称刚性板下的地基沉降及反力;艾智勇和吴超<sup>[12]</sup>、艾智勇和梅阿敏<sup>[13]</sup>则分别对分层地基上的矩形和圆形刚板基础进行了分析。

本文利用弹性圆板与地基表面的竖向位移协调条件与光滑接触条件,再由多层地基应力与位移的传递矩阵解<sup>[14]</sup>,推导出多层地基表面上轴对称受荷弹性圆板问题的解析解。解析解形式简单、算法简洁,因此容易编程实现,具有较高的计算效率,并易于在实际工程中应用与推广。

### 1 多层地基上轴对称受荷弹性圆板

多层地基上轴对称受荷弹性圆板的示意图可参见图 1。

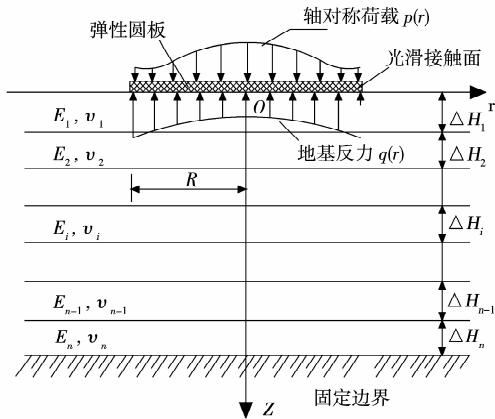


图 1 多层地基上轴对称受荷弹性圆板

多层地基上作用任意轴对称荷载时,第  $i$  层内深度  $z$  处的应力与位移为<sup>[14]</sup>:

$$\bar{\mathbf{G}}(\xi, z) = A \cdot \bar{\mathbf{G}}(\xi, H_n) \quad (1)$$

式中:

$\bar{\mathbf{G}}(\xi, z) = [\bar{u}(\xi, z), \bar{w}(\xi, z), \bar{\tau}_{rz}(\xi, z), \bar{\sigma}_z(\xi, z)]^T$ ;  $A = \Phi(\xi, z - H_i)\Phi(\xi, -\Delta H_{i+1}) \cdots \Phi(\xi, -\Delta H_n)$ , 其中  $H_i$  为地基表面至第  $i$  层土底面的距离,而  $\Delta H_i$  为第  $i$  层土的厚度;  $\Phi(\xi, z)$  为  $4 \times 4$  的传递矩阵,其元素详见文献<sup>[14]</sup>;  $\bar{u}(\xi, z), \bar{w}(\xi, z), \bar{\tau}_{rz}(\xi, z)$ , 和  $\bar{\sigma}_z(\xi, z)$  分别代表径向位移  $u(r, z)$ , 竖向位移  $w(r, z)$ , 剪应力  $\tau_{rz}(r, z)$  和竖向应力  $\sigma_z(\xi, z)$  的一阶或零阶 Hankel 变换,并具有如下的关系<sup>[15]</sup>:

$$\bar{u}(\xi, z) = \int_0^\infty u(r, z) r J_1(\xi r) dr \quad (2a)$$

$$\bar{w}(\xi, z) = \int_0^\infty w(r, z) r J_0(\xi r) dr \quad (2b)$$

$$\bar{\tau}_{rz}(\xi, z) = \int_0^\infty \tau_{rz}(r, z) r J_1(\xi r) dr \quad (2c)$$

及

$$\bar{\sigma}_z(\xi, z) = \int_0^\infty \sigma_z(r, z) r J_0(\xi r) dr \quad (2d)$$

$$u(r, z) = \int_0^\infty \bar{u}(\xi, z) \xi J_1(\xi r) d\xi \quad (3a)$$

$$w(r, z) = \int_0^\infty \bar{w}(\xi, z) \xi J_0(\xi r) d\xi \quad (3b)$$

$$\tau_{rz}(r, z) = \int_0^\infty \bar{\tau}_{rz}(\xi, z) \xi J_1(\xi r) d\xi \quad (3c)$$

$$\sigma_z(r, z) = \int_0^\infty \bar{\sigma}_z(\xi, z) \xi J_0(\xi r) d\xi \quad (3d)$$

其中:  $J_0(\xi r), J_1(\xi r)$  分别为零阶和一阶的 Bessel 函数。

$\bar{\mathbf{G}}(\xi, H_n)$  可由下式确定<sup>[14]</sup>:

$$\bar{\mathbf{G}}(\xi, 0) = \mathbf{f} \cdot \bar{\mathbf{G}}(\xi, H_n) \quad (4)$$

式中:  $\mathbf{f} = \Phi(\xi, -\Delta H_1)\Phi(\xi, -\Delta H_2) \cdots \Phi(\xi, -\Delta H_n)$ 。

假设多层地基底面为固定边界,则有:

$$\bar{u}(\xi, H_n) = \bar{w}(\xi, H_n) = 0 \quad (5)$$

由经典弹性薄板理论<sup>[1, 2]</sup>,可知圆形薄板轴对称弯曲时的挠度方程为:

$$D \nabla^4 \omega(r) = p(r) - q(r) \quad (6a)$$

式中:  $D = \frac{E_p h^3}{12(1 - \nu_p^2)}$ , 为板的抗弯刚度,其中  $E_p, \nu_p, h$  分别为板的弹性模量、泊松比、厚度;  $\nabla^2$  为 Laplace 算子,  $\nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\right)$ ,  $\nabla^4 = (\nabla^2)^2$ ;  $\omega$  为板的挠度;  $p(r)$  为圆板上作用的轴对称荷载;  $q(r)$  为圆板底面多层地基的反力。

对式(6a)进行零阶 Hankel 变换得:

$$D \xi^4 \bar{\omega}(\xi) = \bar{p}(\xi) - \bar{q}(\xi) \quad (6b)$$

式中:  $\xi$  为变换参数,  $\bar{\omega}(\xi), \bar{p}(\xi), \bar{q}(\xi)$  为  $\omega(r), p(r), q(r)$  相对应的零阶 Hankel 变换。

假设弹性圆板与多层地基表面光滑接触,则由光滑接触条件可得:

$$\begin{cases} \tau_{rz}(r, 0) = 0 \\ \sigma_z(r, 0) = -q(r) \end{cases} \quad (7a)$$

式(7a)分别经一阶、零阶 Hankel 变换得:

$$\begin{cases} \bar{\tau}_{rz}(\xi, 0) = 0 \\ \bar{\sigma}_z(\xi, 0) = -\bar{q}(\xi) \end{cases} \quad (7b)$$

根据弹性圆板与多层地基表面竖向位移的协调条件,可得:

$$w(r, 0) = \omega(r) \quad (8a)$$

上式经零阶 Hankel 变换得:

$$\bar{w}(\xi, 0) = \bar{\omega}(\xi) \quad (8b)$$

将式(6b)、(7b)、(8b)代入式(4),得:

$$\begin{cases} \bar{\tau}_{rz}(\xi, H_n) \\ \bar{\sigma}_z(\xi, H_n) \end{cases} = \begin{bmatrix} f_{33} & f_{34} \\ f_{43} & f_{44} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ -\bar{p}(\xi) \\ MD\xi^4 + 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

式中:  $M = \frac{F_{11}F_{24} - F_{14}F_{21}}{F_{11}F_{22} - F_{12}F_{21}}$ ,  $F_{ij}$  为  $f^{-1}$  中的元素。

将式(9)代入式(1),得:

$$\bar{G}(\xi, z) = \frac{A_{i4}f_{33} - A_{43}f_{34}}{f_{34}f_{43} - f_{33}f_{44}} \cdot \frac{\bar{p}(\xi)}{MD\xi^4 + 1} \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (10)$$

当弹性圆板上作用力  $p(r)$  为均布荷载时:

$$\bar{p}(\xi) = \frac{\rho R J_1(\xi R)}{\xi} \quad (11a)$$

当弹性圆板上作用力  $p(r)$  为集中力  $P$  时:

$$\bar{p}(\xi) = \frac{P}{2\pi} \quad (11b)$$

由式(10)结合(11a)或(11b),并进行 Hankel 逆变换,可求得多层地基内任一深度  $z$  处的应力、位移为:

$$u(r, z) = \int_0^\infty \frac{A_{14}f_{33} - A_{13}f_{34}}{f_{34}f_{43} - f_{33}f_{44}} \cdot \frac{\bar{p}(\xi)}{MD\xi^4 + 1} \xi J_1(\xi r) d\xi \quad (12a)$$

$$w(r, z) = \int_0^\infty \frac{A_{24}f_{33} - A_{23}f_{34}}{f_{34}f_{43} - f_{33}f_{44}} \cdot \frac{\bar{p}(\xi)}{MD\xi^4 + 1} \xi J_0(\xi r) d\xi \quad (12b)$$

$$\tau_{rz}(r, z) = \int_0^\infty \frac{A_{34}f_{33} - A_{33}f_{34}}{f_{34}f_{43} - f_{33}f_{44}} \cdot \frac{\bar{p}(\xi)}{MD\xi^4 + 1} \xi J_1(\xi r) d\xi \quad (12c)$$

$$\sigma_z(r, z) = \int_0^\infty \frac{A_{44}f_{33} - A_{43}f_{34}}{f_{34}f_{43} - f_{33}f_{44}} \cdot \frac{\bar{p}(\xi)}{MD\xi^4 + 1} \xi J_0(\xi r) d\xi \quad (12d)$$

将上式求出的表面位移  $w(r, 0)$  代入下式:

$$M_r = -D \left( \frac{d^2 w}{dr^2} + \nu_p \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) \quad (13a)$$

$$M_\varphi = -D \left( \nu_p \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) \quad (13b)$$

$$F_{sr} = -D \frac{d\nabla^2 w}{dr} \quad (13c)$$

可求得弹性圆板的弯矩  $M_r$ 、 $M_\varphi$ , 剪力  $F_{sr}$ 。

## 2 数值计算与分析

该文的数值计算以及相关的 Hankel 逆变换的

实现,可参见文献<sup>[14]</sup>的工作。

### 2.1 弹性半空间上轴对称受荷圆板

为了验证该文理论方法及程序的正确性,笔者对一些已发表的算例进行了分析计算及对比。论文对照 Milovic<sup>[3]</sup>中对弹性半空间上轴对称受荷弹性圆板问题的计算结果,这里对圆板底面下不同深度处的竖向应力  $\sigma_z$ ,地基表面不同径向处的表面沉降  $w$  进行了无量纲化处理,即  $I_z = \frac{\sigma_z}{p}$ 、 $I_w = \frac{wE}{pd}$ ,其中  $E$  为土的弹性模量,  $d$  为板的直径。算例中土层厚度取为 10 倍的弹性圆板半径。算例参数和结果参见图 2、图 3 与图 4,其中弹性圆板刚度  $k$  的定义为<sup>[3]</sup>:

$$k = \frac{E_b}{E} (1 - \nu_s^2) \left( \frac{h}{R} \right)^3 \quad (14)$$

式中:  $E_b$  为圆板的弹性模量,  $\nu_s$  为土的泊松比,  $h$  为板的厚度,  $R$  为板的半径。

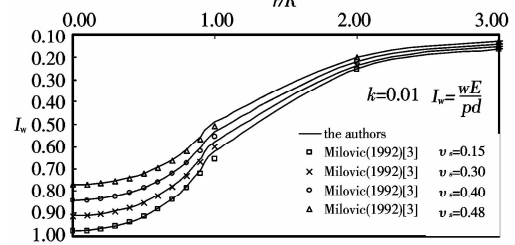


图 2 不同泊松比时弹性半空间上轴对称受荷圆板地基表面不同径向处的竖向位移系数  $I_w$

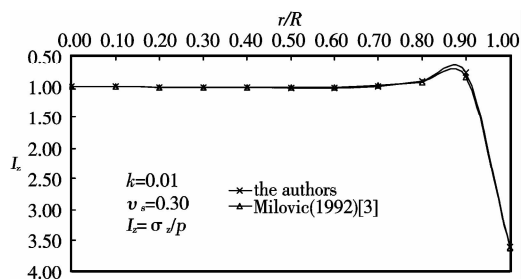


图 3 弹性半空间上轴对称受荷圆板底面下的竖向应力系数  $I_z$

从图 2、图 3 的对比结果可以发现:该文结果与 Milovic<sup>[3]</sup>计算的结果是吻合的,从而验证了本文理论和数值计算方法的正确性。

图 4 表明板的刚度对竖向位移的影响,随着圆板刚度的增大,地基表面不同径向处的竖向位移逐渐减小。图 2、图 4 均表明,弹性半空间上轴对称受荷圆板的竖向位移,随  $r$  的增加而减小。

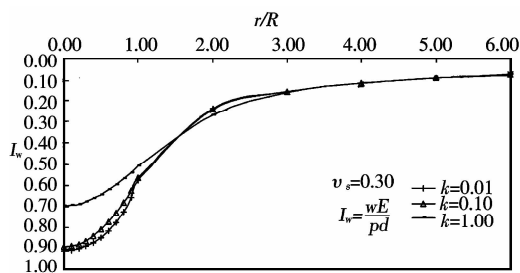


图 4 不同刚度  $k$  时弹性半空间上轴对称受荷圆板地基表面不同径向处的竖向位移系数  $I_w$

表 1 土层参数

土层序号	弹性模量 $E_s$ / kpa	泊松比 $\nu_s$	土层厚度/m
1	6 000	0.45	2
2	8 000	0.40	2
3	10 000	0.35	2
4	12 000	0.30	2
5	14 000	0.25	2
6	16 000	0.20	2
7	18 000	0.15	2

### 2.2 分层地基上轴对称受荷圆板

在本算例中,地基分为七层,各土层的参数见表 1。这里弹性圆板刚度  $k$  的定义为:

$$k = \frac{E_b}{E_7} (1 - \nu_7^2) \left(\frac{h}{R}\right)^3 \quad (15)$$

式中:  $E_7$ 、 $\nu_7$  为第七层土的弹性模量与泊松比,其余参数同前。

同样对不同刚度的弹性圆板中心下不同深度处的竖向应力  $\sigma_z$ ,地基表面不同径向处的表面沉降  $w$

进行了无量纲化处理,即:  $I_z = \frac{\sigma_z}{p}$ 、 $I_w = \frac{wE}{pd}$ 。

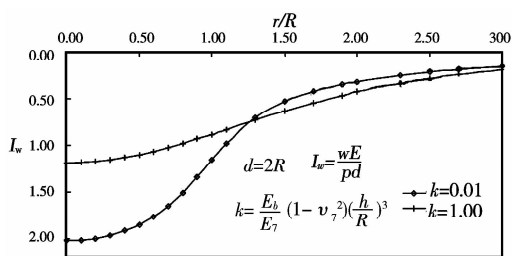


图 5 不同刚度  $k$  时多层地基上轴对称受荷圆板地基表面不同径向处的竖向位移系数  $I_w$

图 5 表明,多层地基表面上轴对称受荷圆板的竖向位移,同样随  $r$  的增加而减小;相同条件下,板的刚度越大,位移越小。

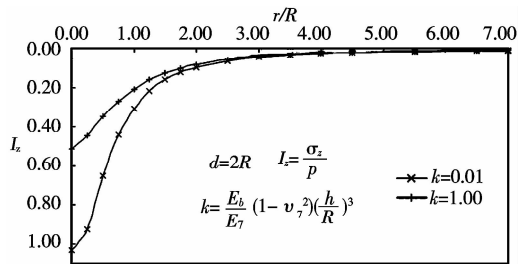


图 6 不同刚度  $k$  时多层地基上轴对称受荷圆板中心下不同深度处的竖向应力系数  $I_z$

图 6 表明,多层地基表面上轴对称受荷圆板中心下的竖向应力,随深度  $z$  的增加而减小,并最终趋于零;同时,圆板中心下的竖向应力还受圆板刚度的影响,圆板的刚度越大,竖向应力越小。

### 3 结 论

利用弹性圆板与多层地基表面的竖向位移协调条件与光滑接触条件,并由多层地基应力与位移的传递矩阵解,推导出多层地基上轴对称受荷弹性圆板问题的解析解。在此基础上编制了相应的程序,并进行了数值计算,结果表明:

1)对于弹性半空间上轴对称受荷弹性圆板问题,本文与已有的经典算例进行了分析对比,结果吻合得较好,从而验证了本文理论及数值方法的正确性和可行性;

2)对于多层地基上轴对称受荷弹性圆板问题,本文计算结果表明,圆板刚度对弹性圆板的位移以及圆板中心下的竖向应力有着较大的影响;

3)该文解析解,形式简单、算法简洁,容易编程实现,并具有较高的计算效率,易于在实际工程中推广应用。

#### 参考文献:

[1] SELVADURAI APS. Elastic Analysis of Soil-foundation Interaction [M]. Amsterdam: Elsevier Scientific Publishing Company, 1979.

[2] GLADWELL GML. Contact Problems in the Classical Theory of Elasticity [M]. The Netherlands: Sijthoff and Noordhoff, Aalphen aan den Rijn, 1980.

[3] MILOVIC D. Stresses and Displacements for Shallow Foundations [M]. Amsterdam: Elsevier, 1992.

[4] HEMSLEY JA. Elastic solutions for axisymmetrically loaded circular raft with free or clamped edges founded on Winkler springs or a halfspace [C]. Proceedings of the Institution of Civil Engineers, 1987, 83(2): 61-90.

[5] VALLABHAN CVG, DAS YC. Analysis of circular tank foundations [J]. Journal of Engineering

- Mechanics, ASCE, 1991, 117(4): 789-797.
- [6] POULOS HG. The behavior of a rigid circular plate resting on a finite elastic layer [J]. Australia Civil Engineering Transactions, 1968: 213-219.
- [7] MILOVIC D. Stresses and displacements in an anisotropic layer due to a rigid circular foundation[J]. Geotechnique, 1972, 22(1):169-174.
- [8] MILOVIC D, DIOGO, M. Settlement of circular foundation of any rigidity[C]. Proceedings of the 10th European Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Firenze, Italy, 1991, 2: 497-500.
- [9] DESAI CS, REESE, LC. Analysis of circular footings on layered soils [J]. Journal of Soil Mechanics and Foundation Division, ASCE, 1970, 96(4): 1289-1310.
- [10] WANG YH, THAM LG, TSUI Y, et al. Plate on layered foundation analyzed by a semi-analytical and semi-numerical method[J]. Computers and Geotechnics, 2003, 30: 409-418.
- [11] 袁聚云, 孙洋波, 王美云, 等. 传递矩阵法分析中心荷载下对称刚性板地基沉降及反力[J]. 力学季刊, 2005, 26(2): 316-321.  
YUAN JY, SUN YB, WANG MY, et al. Analysis of settlement and contact pressure of symmetric rigid plate on subgrade under central concentrated load with method of transferring matrix[J]. Chinese Quarterly of Mechanics, 2005, 26(2): 316-321.
- [12] 艾智勇, 吴超. 分层地基上矩形刚性基础的基底反力、沉降和倾斜计算[J]. 力学季刊, 2008, 29(1):113-119  
AI ZY, WU C. Calculation of reaction forces of base, settlement and inclination of rectangular rigid plate on multi-layered soils[J]. Chinese Quarterly of Mechanics, 2008, 29(1):113-119
- [13] 艾智勇, 梅阿敏. 多层地基上轴对称受荷刚性圆板问题[J]. 力学季刊, 2008, 29(3):424-429.  
AI ZY, MEI AM. Axisymmetric loaded rigid circular plate on multi-layered soil[J]. Chinese Quarterly of Mechanics, 2008, 29(3):424-429.
- [14] AI ZY, Yue ZQ, THAM, LG, et al. Extended Sneddon and Muki solutions for multilayered elastic materials [J]. International Journal of Engineering Science, 2002, 40: 1453-1483.
- [15] SNEDDON IN. The Use of Integral Transform[M]. New York: McGraw-Hill, 1972.

(编辑 胡 玲)

(上接第 32 页)

- [10] 张建勋, 陈福全, 简洪钰. 被动桩中土拱效应问题的数值分析[J]. 岩土力学, 2004, 25(2): 174-178.  
ZHANG JIAN-XUN, CHEN FU-QUAN, JIAN HONG-YU. Numerical analysis of soil arching effects in passive piles[J]. Rock and Soil Mechanics, 2004, 25(2): 174-178.
- [11] 李忠诚, 杨敏. 被动受荷桩成拱效应及三维数值分析[J]. 土木工程学报, 2006, 39(3): 114-117.  
LI ZHONG-CHENG, YANG MIN. Soil arching effect on passive piles and 3-D numerical analysis[J]. China Civil Engineering Journal, 2006, 39(3):114-117.
- [12] 陈福全, 侯永峰, 刘毓旻. 考虑桩土侧移的被动桩中土拱效应数值分析[J]. 岩土力学, 2007, 28(7): 1333-1337.  
CHEN FU-QUAN, HOU YONG-FENG, LIU YU-CHUAN. Numerical analysis of soil arching effects in displaced passive piles considering lateral soil movements [J]. Rock and Soil Mechanics, 2007, 28(7): 1333-1337.
- [13] 吴汉辉. 埋入式抗滑桩模型试验及其工作机理研究[D]. 重庆: 重庆大学, 2004.
- [14] 杨明, 姚令侃, 王广军. 抗滑桩宽度与桩间距对桩间土拱效应的影响研究[J]. 岩土工程学报, 2007, 29(10): 1477-1482.  
YANG MING, YAO LING-KAN, WANG GUANG-JUN. Study on effect of width and space of anti-slide piles on soil arching between piles[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2007, 29(10): 1477-1482.
- [15] 铁道部第二勘测设计院. 抗滑桩设计与计算[M]. 北京: 中国铁道出版社, 1983.
- [16] 钟小春. 基坑支护桩间土体拱效应理论及有限元分析[J]. 岩土工程学报, 2006, 28(Supp. 11): 1501-1504.  
ZHONG XIAO-CHUN. Soil arching between protecting piles of foundation pits and FEM analysis[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2006, 28(Supp. 11): 1501-1504.
- [17] 戴自航. 抗滑桩滑坡推力和桩前滑体抗力分布规律的研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2002, 21(4): 517-521.  
DAI ZI-HANG. Study on distribution laws of landslide-thrust and resistance of sliding mass arching on antislides piles [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2002, 21(4): 517-521.

(编辑 王秀玲)