

# 框支密肋壁板结构托梁内力计算

黄 炜, 王国铨, 姚谦峰, 陈 欣

(西安建筑科技大学 土木工程学院, 西安 710055)

**摘 要:**建立了框支密肋复合墙体墙梁的力学简化模型, 并利用考虑水平摩阻力的弹性地基梁法进行托梁内力计算, 同时应用有限元程序对算例进行数值对比分析。理论研究及计算分析表明: 框支密肋复合墙体墙梁考虑墙体与托梁之间的界面剪力是必要的, 否则不能充分体现托梁与墙体的组合工作性能, 内力计算误差较大。

**关键词:**框支密肋壁板结构; 弹性地基梁; 计算方法; 有限元方法

中图分类号: TU352.1; TU311.4 文献标志码: A 文章编号: 1674-4764(2010)01-0066-06

## Calculation of the Internal Force for the Joist of Frame-Supported Multi-Ribbed Slab Structure

HUANG Wei<sup>1</sup>, WANG Guo-quan<sup>1</sup>, Yao Qian-feng<sup>1</sup>, CHEN Xin<sup>1</sup>

(1. School of Civil Engineering, Xi'an University of Architecture & Technology, Xi'an 710055, P. R. China)

**Abstract:** The simplified mechanical model was proposed for frame-supported multi-ribbed composite wall beam. And the internal force of joist was calculated with the method of beam on the elastic foundation which takes the horizontal friction resistance into consideration. Moreover, a comparative analysis was employed with FEA program. It was found that it was necessary to consider the interfacial shearing force between wall and joist for the frame-supported multi-ribbed composite wall beam, otherwise, the performance of the composite would not exhibited sufficiently and the calculation error would be large.

**Key words:** frame-supported multi-ribbed slab; foundation beam; calculations; finite element method

密肋壁板结构体系<sup>[1-3]</sup>是一种轻质、高强、节能、抗震的建筑结构新体系, 它主要是由预制的密肋复合墙板与隐形外框及钢筋混凝土楼盖现浇而成。框支密肋壁板结构<sup>[4]</sup>底部采用框架-抗震墙结构, 上部采用密肋复合墙体, 适用于底部大空间房屋建筑。由底部的钢筋混凝土框架与上部的密肋复合墙体组合而成的框支密肋复合墙体墙梁, 是这种结构形式中最重要的构件之一, 其基本构造如图 1(a)所示。

墙梁结构的受力颇为复杂, 受到人们的广泛关注。近年来, 研究者通过试验及理论分析, 提出了一些托梁内力的计算方法。文献[5]提出按弹性理论平面应力问题, 解得墙体与托梁界面上的竖向压应

力, 简化为三角形分布荷载分布, 然后求出托梁的弯矩与剪力。它虽然在一定程度上反映了托梁与墙体之间的组合作用关系, 但忽略了墙梁界面剪应力的存在, 未考虑界面水平方向上的变形协调条件, 因此不能充分体现墙梁组合工作性能, 托梁内力计算误差较大。文献[6]研究了无洞连续框墙梁在竖向荷载或竖向荷载和水平地震力同时作用下的抗震性能及承载力, 提出用等效荷载计算托梁内力的方法。文献[7]对墙梁进行有限元分析, 依据其内力和应力分布, 提出托梁内力计算公式和承载力的简化计算方法。文献[6-7]是在试验和有限元分析的基础上, 提出托梁内力的近似计算公式, 没有在本质上反映

收稿日期: 2009-06-28

基金项目: 国家自然科学基金(50878021); 国家“十一五”科技支撑计划项目(2006BAJ04A02-05); 陕西省 13115 项目(2008ZDKG-76); 陕西省重点学科建设专项资金资助项目(E01001, E01003)

作者简介: 黄炜(1976-), 男, 副教授, 博士后, 主要从事结构工程研究, (E-mail)qqhuangwei2005@126.com。

墙梁组合作用关系。而框支密肋壁板结构作为一种新型的结构体系,文献[8]研究了框支密肋复合墙体墙梁的受力机理,并通过回归分析提出了托梁承载力的计算公式,但墙梁组合作用的机理和计算尚需作进一步研究工作。

该文首先根据框支密肋复合墙体墙梁的受力特点,把密肋复合墙体等效为以轻质砌块为基体,混凝土肋梁、肋柱、外框为增强纤维的复合材料等效弹性板;然后利用墙梁结构的组合作用关系,建立了框支密肋复合墙体墙梁的力学简化模型;并利用考虑水平摩擦阻力的弹性地基梁法提出托梁内力计算的解析方法,同时给出框支密肋壁板结构托梁内力计算算

例,应用数值模拟对算例进行对比分析验证。

### 1 框支密肋复合墙体墙梁力学简化模型

由于框支密肋复合墙体墙梁是一种组合构件,其受力情况复杂,有必要建立一种力学概念明确的计算模型,揭示其受力规则。在前期试验研究及有限元分析<sup>[8]</sup>的基础上,该文进一步对框支密肋复合墙体墙梁在竖向荷载作用下的受力机理进行分析研究,首先提出了墙梁结构的等效模型,如图 1(b)所示;在此基础上提出了其简化的力学模型,如图 1(c)所示。

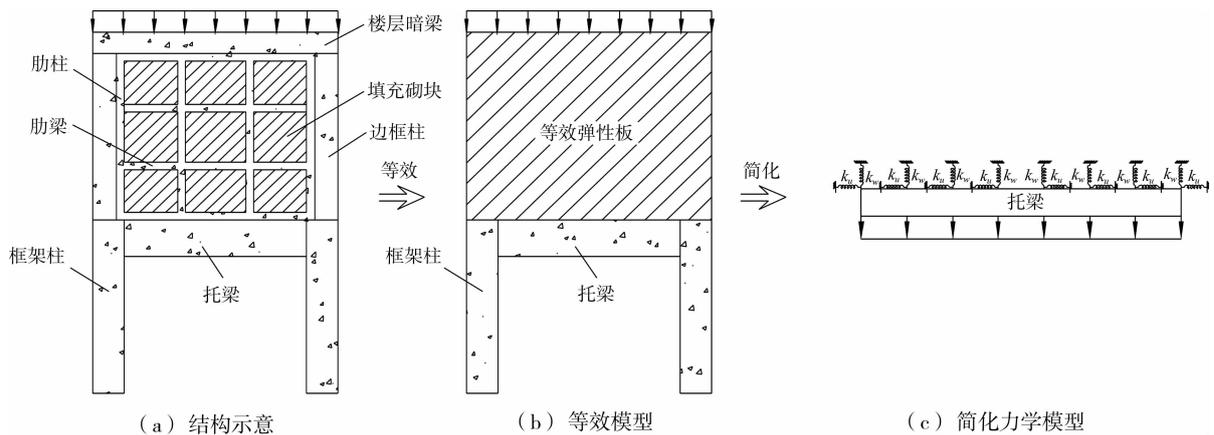


图 1 框支密肋复合墙体墙梁力学简化模型

#### 1.1 等效弹性板模型

按前期的研究成果,在弹性阶段,密肋复合墙体可等效为双向纤维加强模型<sup>[9]</sup>,其等效模型如图 2 所示。其弹性实常数的取法如下:

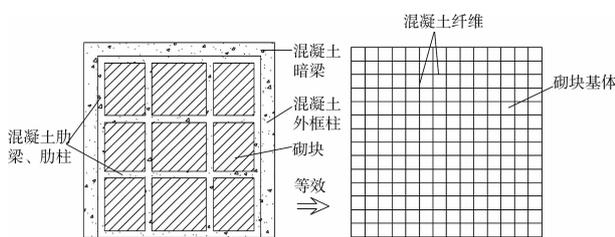


图 2 密肋复合墙体等效模型

$$\text{弹性模量 } E: E = \eta V_c E_c + V_b E_b$$

式中,  $E_c$  和  $E_b$  分别是原墙体中混凝土和砌块的弹性模量;  $V_c$  和  $V_b$  分别是原墙体中混凝土和砌块的体积分数;  $\eta$  是混凝土纤维修正系数,  $\eta = 0.7$ 。

$$\text{剪切模量 } G: \frac{1}{G} = \frac{V_c}{G_c} + \frac{V_b}{G_b}$$

式中,  $G_c$  和  $G_b$  分别是原墙体中混凝土和砌块的剪切模量。

$$\text{泊松比 } \nu: G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

式中,  $E$  和  $G$  分别是等效后的弹性模量和剪切模量。

#### 1.2 力学简化模型

根据课题组前期框支密肋复合墙体墙梁的试验研究及有限元分析结果<sup>[8]</sup>可知,与砌体结构墙梁相类似,在竖向荷载作用下框支密肋复合墙体墙梁存在明显的组合作用,因而墙梁之间存在水平剪应力,它使托梁在除承受由墙传来的竖向压应力外,还在托梁顶面两边产生向外的水平剪应力。文中通过力学简化模型来体现这种组合作用。

在使用阶段框支密肋复合墙体托梁及墙体的塑性影响很小,因此在此阶段可以采用弹性理论分析。为此做如下假定:

- 1) 复合墙体在破坏前具有弹性变形能力,符合弹性材料基本假定;
- 2) 托梁的变形很小,可将其视为半无限体下的弹性地基梁。

由以上假定和倒置的弹性地基梁理论,可把托梁简化为弹性地基梁,上部的复合墙体等效为复合材料等效弹性板,则等效弹性板构成了弹性地基,如

图 1(b)所示。考虑摩擦效应时的文克尔弹性地基模型,把土体视为一系列侧面无摩擦的土柱或彼此独立的竖向弹簧和水平弹簧;其竖向反力与地基沉降成正比,水平反力与地基之间反力的相对水平位移成正比,相似系数为基床系数。

根据以上理论,提出竖向荷载作用下框支密肋复合墙体墙梁的力学简化模型,如图 1(c)所示。其中,等效弹性板视为一系列侧面无摩擦的彼此独立的竖向弹簧和水平弹簧,在荷载作用下其区域内产生与竖向压力和界面剪力成正比的沉降和滑动,即基底反力分布图形和位移图形相似,其相似系数就是等效弹性板基床系数  $k_w$ 、 $k_u$ 。

### 1.3 模型参数 $k_w$ 、 $k_u$ 的确定

Galín<sup>[10]</sup>分析半空间上窄梁时发现,当层厚  $H$  有限时下列关系:

$$k_w = \frac{\pi E}{2B(1-\nu^2)\ln(L/B)}$$

式中  $E$ 、 $B$  和  $L$  分别是等效弹性板的弹性模量、宽度、长度。

文献[9]在密肋复合墙体破坏全过程理论研究得出,在弹性阶段:

$$k_u = \frac{\eta_c(2\eta + 0.4)}{\alpha_1 \left( \frac{H^3}{12EI} + \frac{\mu H}{GA} \right)}$$

式中,  $\eta$  是轴压比,  $\eta_c$  是肋梁、肋柱对砌块的约束系数,  $\alpha_1$  是墙体底部连接方式影响系数,  $\mu$  为截面剪应力分布不均匀系数,  $E$ 、 $G$ 、 $I$ 、 $H$ 、 $A$  分别是等效弹性板的弹性模量、剪切模量、截面惯性矩、墙体的高度、面积。

## 2 托梁内力计算

从框支密肋复合墙体墙梁的力学简化模型出发,利用考虑水平摩擦阻力的弹性地基梁法建立托梁内力的微分方程<sup>[11-16]</sup>,并根据托梁边界条件求出托梁内力。

### 2.1 微分方程的建立

等效弹性板初视为具有水平和竖向反力的弹性支承体,其竖向反力仍采用文克尔地基模型,即假设地基的竖向反力与地基沉降量成正比,水平反力假设与梁底同地基之间反力的相对水平位移成正比。即等效弹性板的竖向反力  $q_w$  和水平反力  $q_u$  可表示为:

$$\left. \begin{aligned} q_w &= -k_w \cdot w \\ q_u &= -k_h \left( u - \frac{h}{2} \cdot w' \right) \\ k_w &= B \cdot k_w \\ k_h &= H \cdot k_u \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中,  $k_v$ 、 $k_h$ 、 $B$ 、 $H$  分别为等效弹性板竖向反应模量、水平向反应模量、宽度、高度;  $w$ 、 $u$ 、 $h$  分别为托梁的挠度、截面水平位移和高度。

考虑作用在图 3 所示托梁微段上的力的平衡,能很容易地导出梁的内力——弯矩  $M$ 、剪力  $V$ 、轴力  $N$  的关系式为:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dV}{dx} &= q_w - q \\ \frac{dN}{dx} &= q_h \\ \frac{dM}{dx} &= V - \frac{h}{2} \cdot q_h \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

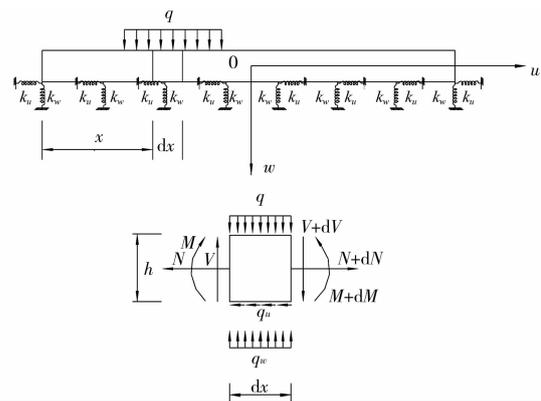


图 3 梁微段受力分析

又由材料力学可知:

$$\left. \begin{aligned} M &= -EIw'' \\ N &= -EAu' \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

式中,  $E$ 、 $I$ 、 $A$  分别为托梁的弹性模量、惯性矩和截面面积。

将式(1)~式(3)化为只含有  $w$ 、 $u$  的方程组:

$$\left. \begin{aligned} w^{(4)} + \frac{k_v}{EI}w + \frac{Ah}{2I}u''' &= \frac{q}{EI} \\ u'' - \frac{k_h}{EA}u + \frac{k_h h}{2EA}w' &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

### 2.2 微分方程组的解

由式(4)中的第 2 式得:

$$w' = \frac{2}{h}u - \frac{2EA}{k_h h}u'' \quad (5)$$

对方程组(4)中的第 1 式两边求导得:

$$w^{(5)} + \frac{k_v}{EI}w' + \frac{Ah}{2I}u^{(4)} = 0 \quad (6)$$

将  $w'$  代入(6)中并简化得:

$$u^{(6)} - au^{(4)} + bu'' - cu = 0 \quad (7)$$

微分方程(7)的特征方程为:

$$\lambda^6 - a\lambda^4 + b\lambda^2 - c = 0 \quad (8)$$

式中,  $a = k_h \left( \frac{1}{EA} + \frac{h^2}{4EI} \right)$ ,  $b = \frac{k_v}{EI}$ ,  $c = \frac{k_v}{EI} \cdot \frac{k_h}{EA}$

特征方程(8)的 6 个根为:  $\pm \gamma, \pm \alpha \pm \beta i$ 。由此 得到方程组(4)的解为

$$\left. \begin{aligned} u &= A_1 e^{\gamma x} + A_2 e^{-\gamma x} + e^{\alpha x} (A_3 \cos \beta x + A_4 \sin \beta x) + e^{-\alpha x} (A_5 \cos \beta x + A_6 \sin \beta x) \\ w &= B_1 e^{\gamma x} + B_2 e^{-\gamma x} + e^{\alpha x} (B_3 \cos \beta x + B_4 \sin \beta x) + e^{-\alpha x} (B_5 \cos \beta x + B_6 \sin \beta x) + \frac{q}{k_v} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

上式中的待定常数  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$  与  $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$  是线性相关的, 它们的关系矩阵  $[A, B]$  可从方程组(4)推出。过程如下:

令  $[A] = [A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6]^T$

$$[M] = \begin{bmatrix} \gamma^4 + \frac{k_h h}{2EA} \gamma + \frac{k_v}{EI}, 0, 0, 0, 0, 0 \\ 0, \gamma^4 - \frac{k_h h}{2EA} \gamma + \frac{k_v}{EI}, 0, 0, 0, 0 \\ 0, 0, \alpha^4 - 6\alpha^2 \beta^2 + \beta^4 + \frac{k_h h}{2EA} \alpha + \frac{k_v}{EI}, -4\alpha^3 \beta + 4\alpha \beta^3 - \frac{k_h h}{2EA} \beta, 0, 0 \\ 0, 0, 4\alpha^3 \beta - 4\alpha \beta^3 + \frac{k_h h}{2EA} \beta, \alpha^4 - 6\alpha^2 \beta^2 + \beta^4 - \frac{k_h h}{2EA} \alpha + \frac{k_v}{EI}, 0, 0 \\ 0, 0, 0, 0, \alpha^4 - 6\alpha^2 \beta^2 + \beta^4 - \frac{k_h h}{2EA} \alpha + \frac{k_v}{EI}, 4\alpha^3 \beta - 4\alpha \beta^3 - \frac{k_h h}{2EA} \beta \\ 0, 0, 0, 0, -4\alpha^3 \beta + 4\alpha \beta^3 + \frac{k_h h}{2EA} \beta, \alpha^4 - 6\alpha^2 \beta^2 + \beta^4 - \frac{k_h h}{2EA} \alpha + \frac{k_v}{EI} \end{bmatrix}$$

$$[N] = \frac{Ah}{2I} \begin{bmatrix} \gamma^3 - \frac{2I}{Ah} \gamma + \frac{2Ik_h}{EhA^2}, 0, 0, 0, 0, 0 \\ 0, -\gamma^3 + \frac{2I}{Ah} \gamma + \frac{2Ik_h}{EhA^2}, 0, 0, 0, 0 \\ 0, 0, \alpha^3 - 3\alpha \beta^2 - \frac{2I}{Ah} \alpha + \frac{2Ik_h}{EhA^2}, -3\alpha^2 \beta + \beta^3 + \frac{2I}{Ah} \beta, 0, 0 \\ 0, 0, 3\alpha^2 \beta - \beta^3 - \frac{2I}{Ah} \beta, \alpha^3 - 3\alpha \beta^2 - \frac{2I}{Ah} \alpha + \frac{2Ik_h}{EhA^2}, 0, 0 \\ 0, 0, 0, 0, -\alpha^3 + 3\alpha \beta^2 + \frac{2I}{Ah} \alpha + \frac{2Ik_h}{EhA^2}, -3\alpha^2 \beta + \beta^3 + \frac{2I}{Ah} \beta \\ 0, 0, 0, 0, 3\alpha^2 \beta - \beta^3 - \frac{2I}{Ah} \beta, -\alpha^3 + 3\alpha \beta^2 + \frac{2I}{Ah} \alpha + \frac{2Ik_h}{EhA^2} \end{bmatrix}$$

方程组(4)化为:  $[B]^T [M] [C] + [A]^T [N] [C] =$

0, 则  $[A] = [[N]^T]^{-1} [M]^T [B]$ 。

因此式(10)中只有 6 个待定常数, 可按托梁的边界条件确定。

### 2.3 边界条件确定托梁内力

由计算简图可知, 边界条件为:

$$EIw'''|_{x=0} = V_1, EIw''|_{x=0} = M_1,$$

$$EAu'|_{x=0} = -N_1;$$

$$EIw'''|_{x=L} = V_2, EIw''|_{x=L} = M_2,$$

$$EAu'|_{x=L} = -N_2。$$

将上述边界条件代入(9)式, 由  $[A] = [[N]^T]^{-1} [M]^T [B]$  可得  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$  和  $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ , 从而可得  $w, u$ 。

$$[B] = [B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6]^T$$

$$[C] = [e^{\gamma x}, e^{-\gamma x}, e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x, e^{-\alpha x} \cos \beta x, e^{-\alpha x} \sin \beta x]^T$$

$$\left. \begin{aligned} M &= -EIw'' \\ \text{又由梁的内力关系式: } V &= -EIw''' \\ N &= -EAu' \end{aligned} \right\} \text{求得托梁}$$

任意截面的  $M, V, N$ 。

### 3 数值分析和理论计算对比

文献[8]中的实验研究和有限元分析对比表明, 其建立的框支密肋复合墙体墙梁数值模型简明有效。利用已验证的有限元模型对单跨模型进行静力数值分析<sup>[17-18]</sup>, 单跨模型各参数见表 1, 然后通过数值模拟结果与考虑水平摩阻力的弹性地基梁法的计算结果进行对比。

表 1 单跨模型参数

试件	墙体高 H/mm	墙体宽 B/mm	托梁长 L/mm	托梁宽 b/mm	托梁高 h/mm
KZML	1 250	100	1 700	200	350

### 3.1 数值模型的建立

在已验证的框支密肋复合墙体墙梁数值分析模型<sup>[8]</sup>的基础上,建立了单跨墙梁的数值计算模型,并对其进行分析,其分析模型如图 4 所示。

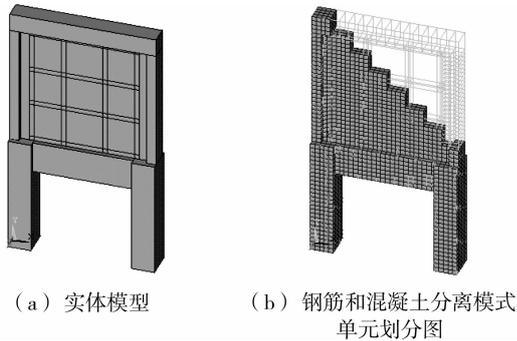


图 4 有限元模型及网格图

### 3.2 数值模拟与理论计算结果对比

通过建立的模型进行数值模拟分析、传统方法和考虑水平摩阻力的弹性地基梁法分别对单跨模型在竖向荷载  $0.75 \text{ N/m}^2$  作用下进行了托梁内力计算。

托梁弯矩、轴力、剪力和竖向位移对比如表 2、图 5 所示。(ANSYS 模拟中的内力值利用提取各截面单元应力,然后用积分的方法获得。)

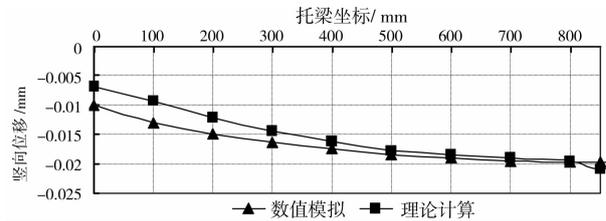


图 5 托梁竖向位移对比

表 2 数值模拟与理论计算结果对比

截面	弯矩				轴力				剪力			
	模拟值/ (kN·m)	理论值/ (kN·m)	误差/ %	传统方法/ (kN·m)	模拟值/ kN	理论值/ kN	误差/ %	传统方法/ kN	模拟值/ kN	理论值/ kN	误差/ %	传统方法/ kN
支座截面	23.3	25.1	7.2	14.45	-1.8	0	—	0	52.13	63.75	18.2	76.51
1/8 截面	35.09	38.87	9.7	18.52	20.98	22.45	6.5	27.63	25.43	33.23	23.4	57.38
1/4 截面	46.75	48.45	3.5	24.96	37.94	39.86	3.5	37.23	8.91	12.26	27.3	38.26
3/8 截面	47.94	49.56	3.3	28.43	43.36	44.82	3.3	42.41	4.37	6.47	32.4	19.13
1/2 截面	48.6	51.75	6.1	35.62	46.17	49.32	6.1	53.13	0.46	0	—	0

从表 2、图 5 可以看出,传统方法计算结果与数值模拟的托梁内力值存在较大的差别,这是由传统方法理论局限性引起的。按文中理论方法计算的托梁各截面(除支座截面)竖向位移、弯矩、轴力与数值模拟值较为接近,误差可控制在一定范围内;对于托梁的支座截面,模拟值和理论计算结果产生较大误差,其原因可能是:1)理论假定的实体模型与数值模拟模型有一定的误差;2)理论计算中假定的托梁边界条件是完全固接,这与数值分析中的真实连接不相符。理论方法计算的剪力值与模拟值相差较大,但比传统方法更趋近模拟值。因此对于托梁内力计算,需考虑理论假定和连接条件的影响以提高计算结果的精度。

## 4 结 论

建立了在竖向荷载作用下框支密肋复合墙体墙梁的力学简化模型,通过引入考虑摩阻力的弹性地基梁法,得出了托梁内力的解析解,并通过通用有限元程序对墙梁结构进行了数值分析,理论研究和计

算结果对比表明:

1)在竖向荷载作用下应该考虑墙梁界面剪应力的存在,否则会忽略界面水平方向上的变形协调条件,不能充分体现托梁与墙体的组合工作特性;

2)文中给出的力学简化模型很好的反映了墙梁的组合作用,考虑水平摩阻力的弹性地基梁法作为竖向荷载作用下框支密肋复合墙体托梁内力的计算方法具有一定的理论依据和实用值。

### 参考文献:

- [1] 姚谦峰,张亮,刘佩. 密肋复合墙体宏观有效弹性模量的细观力学有限元分析[J]. 工程力学, 2009, 26(4): 139-143.  
YAO QIAN-FENG, ZHANG LIANG, LIU PEI. Micro-mechanics finite element analysis of effective elastic moduli of multi-ribbed slab wall[J]. Engineering Mechanics, 2009, 26(4): 139-143.
- [2] 王爱民,姚谦峰,吴敏哲. 密肋复合墙体压弯剪复合受力性能试验研究[J]. 建筑结构学报, 2008, 29(2): 79-

84.  
WANG AI-MIN, YAO QIAN-FENG, WU MIN-ZHE. Experimental study on behavior under co-action of press, bending and shear of multi-ribbed composite wall [J]. Journal of Building Structures, 2008, 29 (2): 79-84.
- [3] 黄炜, 陈国新, 姚谦峰. 基于统一强度理论的密肋复合墙体开裂荷载计算[J]. 工程力学, 2008, 25(7): 94-99.  
HUANG WEI, CHEN GUO-XIN, YAO QIAN-FENG. Calculation on Cracking Load of multi-ribbed composited wall based on twin shear unified strength theory[J]. Engineering Mechanics, 2008, 25(7): 94-99.
- [4] 丁永刚, 姚谦峰. 不等跨框支密肋壁板结构连续墙梁抗震性能试验研究[J]. 世界地震工程, 2007, 23(4): 170-175.  
DING YONG-GANG, YAO QIAN-FENG. Experimental study on seismic performance of frame-supported multi-ribbed continuous wall beam with unequal spans[J]. World Earthquake Engineering, 2007, 23(4): 170-175
- [5] 热摩奇金. 基础实用计算法[M]. 顾子聪, 齐志成, 译. 北京: 中国建筑工业出版社, 1954.
- [6] 庄一舟. 地震效应前后框支连续墙梁的试验研究[J]. 浙江大学学报, 1996, 31(6): 760-766.  
ZHUANG YI-ZHOU. Experimental study of continuous wall-beam supported by frame before & after seismic effect [J]. Journal of ZheJiang University, 1996, 31(6): 760-766.
- [7] 龚绍熙, 李翔. 框支墙梁的试验研究、有限元分析和承载力计算[J]. 建筑结构, 2001, 31(9): 12-16.  
GONG SHAO-XI, LI XIANG. Experimental research, finite element analysis and bearing capacity calculation of wall-beams supported on frame [J]. Building Structure, 2001, 31(9): 12-16.
- [8] 丁永刚. 框支密肋壁板结构墙梁受力性能及设计计算方法研究[D]. 西安: 西安建筑科技大学, 2006.
- [9] 黄炜. 密肋复合墙体抗震性能及设计理论研究[D]. 西安: 西安建筑科技大学, 2004.
- [10] 宰金珉, 宰金璋. 高层建筑基础分析与设计[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 1993.
- [11] 谈至明. 具有水平摩阻力的弹性地基上梁的解[J]. 力学与实践, 1997, 19(3): 33-35.  
TAN ZHI-MING. Solution to beam on elastic foundation with the horizontal friction resistance [J]. Mechanics and Engineering, 1997, 19(3): 33-35.
- [12] LIN L, ADAMS G G. Beam on tensionless elastic foundation [J]. Journal of the Engineering Mechanics Division. ASCE, 1987, 113(4): 542-553.
- [13] GIRJA VALLABHAN C V, DAS Y C. Parametric study of beams on elastic foundations [J]. Journal of the Engineering Mechanics Division. ASCE, 1988, 114 (12): 2072-2082.
- [14] SADANANDAN N S, AMIN GHALI. Reinforced Concrete Beam-Columns and Beams on Elastic Foundation [J]. Journal of Structure Engineering. ASCE, 1989, 115(3): 666-682.
- [15] ZHANG YIN, KEVIN D M. Response of a finite beam in contact with a tensionless foundation under symmetric and asymmetric loading [J]. International Journal of Solids and Structures, 2006, (41): 6745-6758.
- [16] ZHANG YIN. Tensionless contact of a finite beam resting on Reissner foundation [J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2008, 50: 1035-1041.
- [17] CRISFIELD M A. Snap-through and snap-back response in concrete structures and the dangers of under-integration [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1986, 22: 751-767.
- [18] DARWIN D. Reinforced concrete proceedings of the international work shop on finite element analysis of reinforced concrete structures II [J]. Journal of Computing in Civil Engineering. ASCE, 1993: 203-232.

(编辑 胡英奎)