

doi:10.11835/j.issn.1674-4764.2015.03.006



# 竖向荷载下弹性支承直墙拱反弯点理论分析

韩永帅<sup>1</sup>, 周健南<sup>1</sup>, 金丰年<sup>1</sup>, 孔新立<sup>1</sup>, 范华林<sup>1,2</sup>

(1. 解放军理工大学 国防工程学院; 爆炸冲击防灾减灾国家重点实验室, 南京 210007;

2. 河海大学 力学与材料科学院, 南京 210098)

**摘要:**在工程实践中,直墙拱应用较多。由于拱脚位移的存在,合理假设拱脚约束为转角约束、竖向约束和水平弹性约束,应用力法推导出了在弯矩、剪力和轴力共同作用下直墙拱沿弧长的弯矩公式。研究了竖向均布荷载、竖向三角形荷载和竖向集中力荷载作用下,直墙拱沿弧长的弯矩分布及反弯点形成的规律;发现在3种荷载作用下,使得拱脚弯矩为零时的圆心角依次减小。取弹簧支座刚度为等效的下端固支、上端允许水平位移的直墙的抗推刚度,得出了随着直墙高度增加,圆弧拱拱顶弯矩增大而拱脚弯矩减小的变化规律。在直墙拱的设计中,建议选取合适的直墙高度和使得圆弧拱拱脚弯矩为零的圆心角大小,从而有利于提高结构抗弯承载力及拱脚抗剪承载力。

**关键词:**直墙拱;反弯点;力法;弹性约束;等效刚度

**中图分类号:**TU311.1 **文献标志码:**A **文章编号:**1674-4764(2015)03-0042-06

## Theoretical analysis for inflection point of bending moment of straight-wall arch with elastic supports under vertical loads

Han Yongshuai<sup>1</sup>, Zhou Jiannan<sup>1</sup>, Jin Fengnian<sup>1</sup>, Kong Xinli<sup>1</sup>, Fan Hualin<sup>1,2</sup>

(1. State Key Laboratory for Disaster Prevention and Mitigation of Explosion and Impact, College of Defense Engineering, PLA University of Science and Technology, Nanjing 210007, P. R. China;

2. College of Mechanics and Materials, Hohai University, Nanjing 210098, P. R. China)

**Abstract:** Straight-wall arches have been widely applied in civil engineering. Considering displacements at the arch springing, the arch model was assumed as elastically supported horizontally. Distribution of the bending moments was deduced using classical force method. The distribution and the inflection point of the bending moment were studied under uniformly distributed, triangular and concentrated loads, respectively. Central angle corresponding to zero bending moment at the springing was calculated, which decreased when the load changed from uniformly distributed load, triangular load to concentrated load. Horizontal constraint from the side wall was assumed as elastic support and the equivalent spring stiffness was deduced. With the increase of the straight-wall height, bending moment at the crown increased while that at the springing decreased. When the moment at the springing was zero, anti-flexural capacity at the crown and anti-shearing ability at the springing were improved. Straight-wall

**收稿日期:**2014-12-25

**基金项目:**国家自然科学基金(51321064, 51308544, 51478465); 解放军理工大学预先研究基金(KYDXZLXY1301)

**作者简介:**韩永帅(1990-),男,主要从事岩土工程研究, (E-mail) hanyongshuai@gmail.com.

周健南(通信作者),男,博士, (E-mail) zjn\_0414@163.com.

**Received:**2014-12-25

**Foundation item:** National Natural Science Foundation of China (No. 51321064, 51308544, 51478465); PLA University of Science and Technology Pre-Research Foundation of China (No. KYDXZL-XY1301)

**Author brief:** Han Yongshuai (1990-), postgraduate, main research interests: geotechnical engineering, (E-mail) hanyongshuai@gmail.com

Zhou Jiannan (corresponding author), PhD, (E-mail) zjn\_0414@163.com

height and central angle should be selected to make the moment at the springing zero.

**Key words:** straight-wall arch; inflection point of bending moment; force method; elastic supports; equivalent stiffness

拱结构是常用的结构形式之一,特别是在隧道、地下洞室中,由于其较好的传力路径、较高的受弯承载力,得到了广泛的应用。

学者们对不同支承形式、不同受力特点圆弧拱的力学性能开展了一系列深入的研究工作。夏桂云等<sup>[1]</sup>指出大曲率深拱中,剪切变形不可忽略,进而研究了考虑曲率、剪切变形的大曲率圆弧深拱平面弹性稳定性;杨永华等<sup>[2]</sup>给出了固支形式下圆弧拱弯曲扭屈曲荷载的理论解,指出径向均布荷载作用下,屈曲荷载随着圆心角的增大而逐渐减小;Plaut R. 等<sup>[3]</sup>研究了拱脚转动约束的正弦拱在竖向均布荷载作用下的临界屈曲荷载,其转动约束的扭转刚度随支座的水平推力可线性变化;Bradford 等<sup>[4]</sup>研究了水平弹性支承的轴压抛物线拱在竖向均布荷载作用下的稳定问题;杨洋等<sup>[5-6]</sup>用水平弹簧等效替代支承于其它构件上的拱脚支座约束,研究了钢拱的平面内极限承载力、弹性屈曲等;周健南等<sup>[7-8]</sup>针对不同拱结构形式,给出了动荷载动力系数的确定方法,从而推导出了不同荷载作用下拱形结构内力计算公式,并给出了不同荷载作用下震后结构抗动载能力评估方法。

在工程实践中,直墙拱应用广泛,陈海龙等<sup>[9]</sup>的试验研究表明,由于直墙不是完全刚性的,在竖向爆炸荷载作用下,直墙会产生侧向位移;李平<sup>[10]</sup>通过荷载-结构法和有限元法对圆拱直墙隧道结构进行计算,发现结构最大位移集中在拱圈位置。在这一类的直墙拱中,拱脚的支承形式不能简单假设为固支或者简支。传统结构力学方法计算时,拱脚按照固端无铰拱考虑,同时考虑拱脚位移的影响<sup>[11-12]</sup>,为此,可以假设拱脚处为转角约束、竖向约束以及水平弹性约束。目前,针对这类支承约束假设的研究较少,本文主要针对此种约束下,建立水平弹簧刚度的近似计算方法、理论分析不同受力形式下圆弧拱弯矩反弯点的分布规律,为直墙圆拱的合理设计提供依据,也为深入分析直墙圆拱的极限承载力与稳定性奠定基础。

## 1 圆弧拱内力计算

在直墙圆弧拱的受力分析中,主要关心圆弧拱部分的力学行为,为了简化计算,可以只取圆弧拱部分进行计算,将圆弧拱拱脚约束合理假设为转角约

束、竖向约束以及水平弹性约束,如图 1 所示。

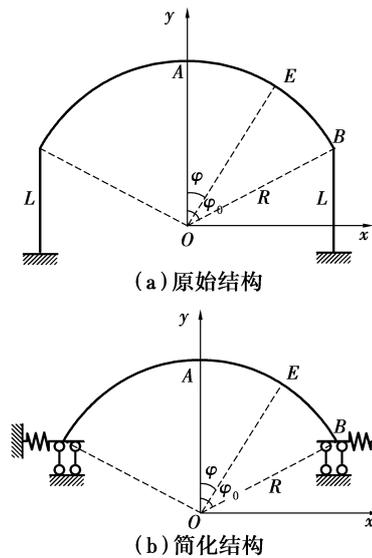


图 1 结构简图

Fig. 1 The structure diagram

该结构为一等截面滑移弹簧支座圆弧拱,截面为  $b \times h$  的矩形,拱的圆心角为  $2\varphi_0$ ,半径为  $R$ ,分别承受竖向均布荷载、竖向三角形荷载和竖向集中力荷载作用。

结构为三次超静定对称结构,取其一半并应用力法<sup>[13]</sup>解其未知力,取消拱顶处转角约束、竖向约束和拱脚处水平弹簧约束,计算简图如图 2 所示。在对称荷载作用下,拱顶处的反对称未知力  $X_3$  为零。竖向均布荷载、竖向三角形荷载和竖向集中力荷载作用下,结构基本体系如图 3 所示。

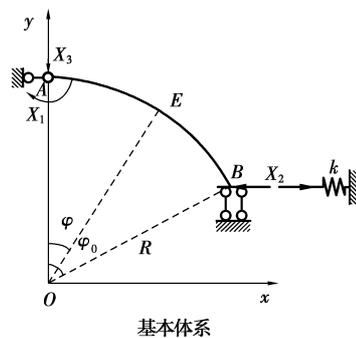


图 2 计算简图

Fig. 2 The calculation diagram

力法方程为

$$\begin{aligned} \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \Delta_{1P} &= 0 \\ \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \Delta_{2P} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

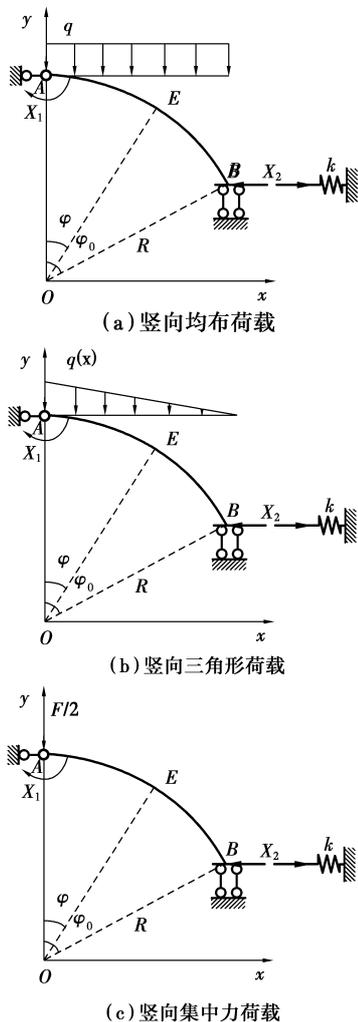


图 3 不同荷载作用下基本体系

Fig. 3 The basic system under the different loads

对于矢跨比较小的圆弧拱,剪力、轴力对结构变形的影响不能忽略,这里考虑弯矩、剪力、轴力共同作用,有

$$\delta_{ij} = \int \frac{\overline{M}_i \cdot \overline{M}_j}{EI} ds + \int \frac{k_0 \overline{F}_{Qi} \cdot \overline{F}_{Qj}}{GA} ds + \int \frac{\overline{F}_{Ni} \cdot \overline{F}_{Nj}}{EA} ds \quad (2)$$

式中:  $k_0$  为切应变截面形状系数。

由于水平弹簧(弹簧刚度为  $k$ )的影响,系数  $\delta_{22} = \delta_{22}' + \delta_{22}'' = \delta_{22}' + 1/k$ 。

解力法方程,求出多余未知力

$$\begin{aligned} X_1 &= -\frac{\Delta_{1P}\delta_{22} - \Delta_{2P}\delta_{12}}{\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2} \\ X_2 &= -\frac{\Delta_{2P}\delta_{11} - \Delta_{1P}\delta_{12}}{\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2} \end{aligned} \quad (3)$$

承受竖向均布荷载  $q$  的作用,任一点弯矩方程为

$$M = X_1 + X_2(R - R\cos\varphi) - \frac{1}{2}qR^2\sin^2\varphi \quad (4)$$

承受竖向三角形荷载  $q(x)$  的作用,任一点弯矩方程为:

$$M = X_1 + X_2R(1 - \cos\varphi) - qR^2\sin^2\varphi\left(\frac{1}{2} - \frac{\sin\varphi}{6\sin\varphi_0}\right) \quad (5)$$

承受竖向集中力荷载  $F$  的作用,任一点弯矩方程为

$$M = X_1 + X_2(R - R\cos\varphi) - \frac{FR\sin\varphi}{2} \quad (6)$$

## 2 等效弹簧刚度计算

弹簧支座刚度为等效直墙的抗推刚度,取下端固支、上端允许水平位移的直墙计算等效弹簧支座刚度  $k$ ,如图 4 所示。

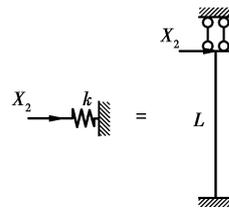


图 4 等效弹簧刚度计算简图

Fig. 4 The calculation diagram of equivalent spring stiffness

直墙高为  $L$ ,截面同圆弧拱截面,材料相同,计算如下:

忽略竖向轴力,在水平力  $X_2 = 1$  作用下,未知力  $X_1' = L/2$ ,所以在  $X_2 = 1$  作用下,上端水平位移为

$$\Delta = \frac{1}{EI} \int_0^L \left(y - \frac{L}{2}\right)^2 dy + \frac{k_0}{GA} \int 1 dy = \frac{L^3}{12EI} + \frac{k_0 L}{GA} \quad (7)$$

所以,等效弹簧支座刚度  $k$  为

$$k = \frac{1}{\Delta} = \frac{1}{\frac{L^3}{12EI} + \frac{k_0 L}{GA}} \quad (8)$$

## 3 算例分析

### 3.1 算例

取圆弧拱跨度不变,  $D = 20$  m;矢高  $f$  随着圆弧拱圆心角  $2\varphi_0$  变化,矢跨比  $\frac{f}{D} = \frac{1 - \cos\varphi_0}{2\sin\varphi_0}$ ;半径

$R = \frac{D}{2\sin\varphi_0}$ ;截面高度  $h = 0.8$  m。

对于矩形截面,有  $A = \frac{12I}{h^2}$ ,切应变截面形状系

数  $k_0 = 1.2$ ;取  $\frac{E}{G} = \frac{8}{3}$ ,得

$$EI\delta_{ij} = \int \overline{M}_i \cdot \overline{M}_j ds + \frac{4h^2}{15} \int \overline{F}_{Qi} \cdot \overline{F}_{Qj} ds +$$

$$\frac{h^2}{12} \int \overline{F_{N_i}} \cdot \overline{F_{N_j}} ds \quad (9)$$

取直墙高度  $L = 5 \text{ m}$ , 矩形截面  $h = 0.8 \text{ m}$ , 则有  $k = \frac{EI}{11.27}$ 。

跨度一定时, 不同圆心角的直墙拱结构形式, 如图 5 所示。

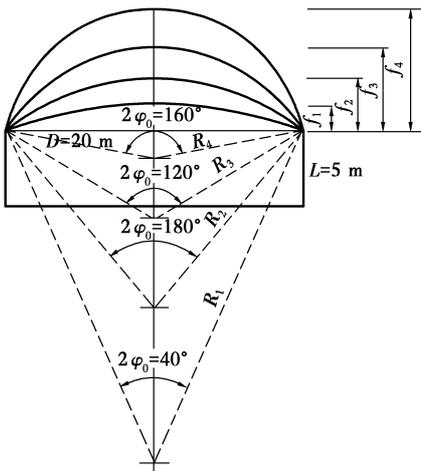
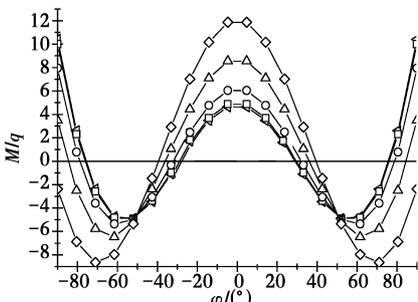


图 5 跨度一定时不同圆心角的直墙拱结构

Fig. 5 The straight wall arch structure of different central angle with certain span

### 3.2 弹簧刚度的影响

如上所述, 弹簧刚度是等效直墙的抗推刚度, 在直墙截面、材料参数不变的情况下, 直墙高度  $l$  越小, 等效刚度越大; 当直墙高度  $l$  趋近于零时, 等效刚度趋近于无穷大, 此时拱脚相当于固支。不同直墙高度时, 竖向均布荷载作用下, 半圆拱 ( $2\varphi_0 = 180^\circ$ ) 沿弧长弯矩分布如图 6 所示。



注:  $l=0 \text{ m}$ — $l=2.5 \text{ m}$ — $l=5.0 \text{ m}$ — $l=7.5 \text{ m}$ — $l=10 \text{ m}$

图 6 不同弹簧刚度时沿弧长弯矩分布图  
Fig. 6 The moment distribution along the arc with different elastic stiffness

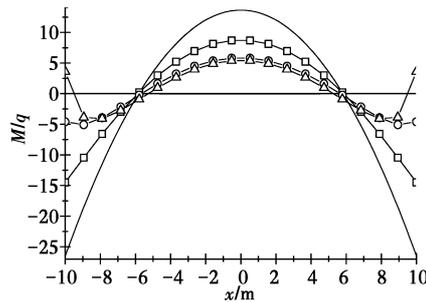
从图 6 可看出, 不同的弹簧刚度 (不同的直墙高度) 对沿弧长弯矩分布有较大影响: 当直墙较低时, 抗推刚度较大, 水平弹性约束较强, 拱脚位移较小, 趋向于拱脚固支 (直墙高度为 0); 当直墙较高时, 水平弹性约束较弱, 半圆拱的拱顶、拱脚弯矩异号, 即

沿弧长弯矩分布形式发生变化。

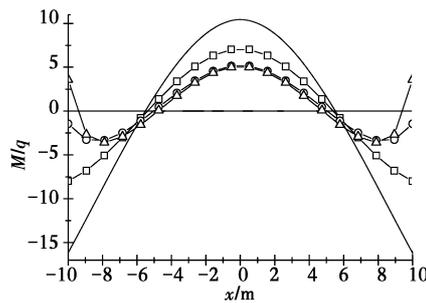
计算表明: 直墙高度与圆拱半径比值  $L/R \leq 0.3335$  时, 半圆拱拱顶、拱脚弯矩与拱脚固支时拱顶、拱脚弯矩值相差均在 10% 以内, 此时可以忽略弹簧刚度的影响; 直墙高度与圆拱半径比值  $L/R \geq 0.4694$  时, 半圆拱拱顶、拱脚弯矩与拱脚固支时拱顶、拱脚弯矩值相差均超过 20%, 不可忽略弹簧刚度的影响; 随着直墙高度与圆拱半径比值的增大, 半圆拱拱顶、拱脚弯矩与拱脚固支时拱顶、拱脚弯矩值相差增大; 当直墙高度与圆拱半径比值  $L/R \geq 0.9019$  时, 半圆拱的拱脚弯矩变为负值, 拱顶与拱脚弯矩异号, 弯矩分布形式发生改变。

### 3.3 不同荷载不同圆心角时沿 $x$ 轴弯矩分布

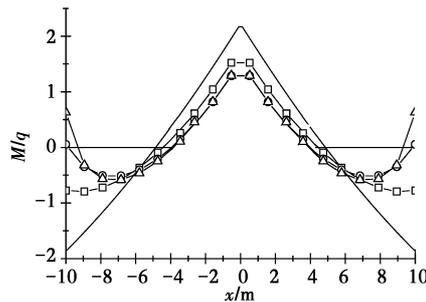
圆弧拱圆心角  $2\varphi_0$  分别为  $40^\circ, 80^\circ, 120^\circ, 160^\circ$  时, 分别承受竖向均布荷载、竖向三角形荷载和竖向集中力荷载的作用, 其弯矩沿  $x$  轴分布如图 7 所示。



(a) 均匀荷载



(b) 三角形荷载



(c) 集中力荷载

注:  $2\varphi_0=40^\circ$ — $2\varphi_0=80^\circ$ — $2\varphi_0=120^\circ$ — $2\varphi_0=160^\circ$

图 7 不同荷载不同圆心角时沿  $x$  轴弯矩分布图  
Fig. 7 The moment distribution along the  $x$ -axis with different central angles under different loads

### 3.4 拱脚弯矩为零时的圆心角

对于地下直墙拱结构,在地震、爆炸等动荷载作用下,结构可能因开裂而导致承载力降低,相关研究表明,拱结构拱脚处由于开裂,承载力将降低 50% 以上<sup>[7]</sup>。

因此,科学合理的结构设计应避免在拱脚位置出现弯曲拉应力而导致拱脚混凝土开裂。拱脚弯矩为零在结构设计中的重要工程应用价值和意义在于该位置不产生弯曲拉应力,可抑制拱脚混凝土开裂,确保拱脚截面的抗剪强度。

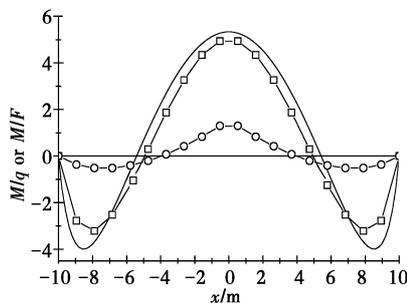
利用弯曲拉应力和轴向压力以及混凝土抗拉强度,建立拱脚的开裂准则<sup>[14]</sup>:

$$\sigma_c = \frac{M}{W_0} + \frac{N}{A_0} \leq f_t \quad (10)$$

式中:  $\sigma_c$  为受拉边缘混凝土的应力;  $W_0$  为受拉边缘的截面抵抗矩;  $A_0$  为换算截面积;  $M$  为弯矩;  $N$  为轴力;  $f_t$  为混凝土的抗拉强度。

当受拉侧弯矩  $M$  较小或者为零时,拉应力较小或者为负值,此时的  $\sigma_c$  远小于混凝土抗拉强度  $f_t$ , 截面不开裂,拱脚的抗剪承载能力不减弱。

当圆心角较小时,拱顶、拱脚弯矩异号;当圆心角较大时,拱顶、拱脚弯矩同号;所以对某一算例,存在一个圆心角角度,使拱脚弯矩为零。对于该算例,对应于竖向均布荷载、竖向三角形荷载和竖向集中力荷载,使得拱脚弯矩为零的圆心角分别为  $2\varphi_0 = 142^\circ$ 、 $2\varphi_0 = 131^\circ$ 、 $2\varphi_0 = 117^\circ$ , 其沿弧长弯矩分布如图 8 所示:



注: — 均布荷载  $2\varphi_0=142^\circ$  — 三角形荷载  $2\varphi_0=131^\circ$  — 集中力荷载  $2\varphi_0=117^\circ$

图 8 拱脚弯矩为零时沿  $x$  轴弯矩分布图

Fig. 8 The moment distribution along the  $x$ -axis when the skewback moment is zero

### 3.5 讨论

由图 7 可以看出,拱顶处 ( $x = 0$ ) 弯矩为正,内侧受拉;随着坐标  $x$  的增大,从拱顶向拱脚,沿弧长弯矩减小,直至为负,此时拱脚外侧受拉(如图 7 中圆心角  $2\varphi_0 = 40^\circ$ 、 $80^\circ$  时),在弧长范围内存在一个

反弯点,且正负弯矩的绝对值最大值相差较大,不利于结构承载;当圆心角  $2\varphi_0$  继续增大时,拱脚弯矩又变为正值,即拱脚内侧受拉(如图 7 中圆心角  $2\varphi_0 = 160^\circ$  时),在弧长范围内存在两个反弯点,且正负弯矩的绝对值最大值相差不大,有利于结构承载。

随着圆心角  $2\varphi_0$  的变化,拱顶、拱脚弯矩从异号变为同号,所以存在一个圆心角角度,使得拱脚弯矩为零,这时能够避免拱脚混凝土截面因受拉而开裂,有利于保证截面的抗剪承载能力。由图 8 可以看出,对于不同的荷载形式,拱脚弯矩为零的圆心角各不相同,且对于竖向均布荷载、竖向三角形荷载和竖向集中力荷载,圆心角依次减小。

比较图 7 中同一荷载作用下不同圆心角(矢跨比)时弯矩最大值可以发现,圆心角较小(矢跨比较小)时,拱顶、拱脚处弯矩绝对值均较大;随着圆心角的增大(矢跨比增大),拱顶、拱脚处弯矩明显减小。另外,计算所得的使得拱脚弯矩为零的圆心角角度在  $120^\circ$  附近或者  $120^\circ$  与  $160^\circ$  之间,而从图 7 可以看出圆心角为  $120^\circ$  和  $160^\circ$  时,弯矩沿弧长范围内变化不大,只在拱脚处有所不同。因此,拱结构跨度及所受荷载确定时,应尽量选取使得拱脚弯矩为零的圆心角角度,有利于提高结构抗弯承载力及拱脚抗剪承载力。

由于拱脚水平位移的存在,使得拱脚弯矩形式发生了变化,对圆弧拱的破坏形式有一定影响;选取合适的直墙高度,亦即合适的等效弹簧刚度,可以使得圆弧拱沿弧线最大正负弯矩大小相当,有利于结构承载。该结论对于工程建设中高边墙拱结构的合理设计具有重要的工程应用价值。

## 4 结论

1) 假设拱脚有转角约束、竖向约束和水平弹性约束的情况,理论推导了弯矩、剪力、轴力共同作用下,圆弧拱沿弧长弯矩公式。

2) 圆弧拱圆心角较小时,沿弧长范围内只存在一个反弯点,最大正负弯矩值相差较大;圆弧拱圆心角较大时,沿弧长范围内存在两个反弯点,最大正负弯矩值大小相当。

3) 对于竖向均布荷载、竖向三角形荷载和竖向集中力荷载,使得拱脚弯矩为零的圆心角依次减小。

4) 水平弹簧刚度对沿弧长弯矩分布有较大影响,在一定范围内随着弹簧刚度的减小,拱顶弯矩增大,拱脚弯矩减小。

5)选取合适的直墙高度和使得圆弧拱拱脚弯矩为零的圆心角大小,有利于提高结构抗弯承载力及拱脚抗剪承载力。

#### 参考文献:

- [1] 夏桂云,李传习,曾庆元. 大曲率圆弧深拱平面弹性稳定分析[J]. 工程力学, 2008, 25(1): 145-149.  
Xia G Y, Li C X, Zeng Q Y. In-plane elastic buckling analysis of circular arch considering influences of curvature and shear deformation [J]. Engineering Mechanics, 2008, 25(1): 145-149. (in Chinese)
- [2] 杨永华,陈以一. 双轴对称固支圆弧拱弯扭屈曲荷载的理论解[J]. 工程力学, 2008, 25(4): 1-4.  
Yang Y H, Chen Y Y. Theoretical solution for flexural-torsional buckling load of fixed-end circular arches with blaxially-symmetric cross-sections [J]. Engineering Mechanics, 2008, 25 (4): 1-4. (in Chinese)
- [3] Plaut R H. Buckling of shallow arches with supports that stiffen when compressed [J]. Journal of Engineering Mechanics, 1990, 116(4): 973-976.
- [4] Bradford M A, Wang T, Pi Y L, et al. In-plane stability of parabolic arches with horizontal spring supports. I: Theory [J]. Journal of Structural Engineering, 2007, 133(8): 1130-1137.
- [5] 杨洋,童根树. 水平弹性支承圆弧钢拱的弹性屈曲分析[J]. 工程力学, 2011, 28(3): 9-16.  
Yang Y, Tong G S. In-plane elastic buckling of steel circular arches with horizontal spring support [J]. Engineering Mechanics, 2011, 28 (3): 9-16. (in Chinese)
- [6] 杨洋,童根树. 水平弹性支承圆弧钢拱的平面内极限承载力研究[J]. 工程力学, 2012, 29(3): 45-54.  
Yang Y, Tong G S. Study for in-plane ultimate strength of steel circular arches with horizontal spring supports [J]. Engineering Mechanics, 2012, 29(3): 45-54. (in Chinese)
- [7] 周健南,金丰年,范华林,等. 震后地下拱结构的抗冲击波动载能力评估[J]. 工程力学, 2012, 29(2): 159-164.  
Zhou J N, Jin F N, Fan H L, et al. Residual dynamic resistance of seismic damaged underground arch [J]. Engineering Mechanics, 2012, 29(2): 159-164. (in Chinese)
- [8] 周健南,范华林,金丰年,等. 非均布荷载作用下震后地下拱结构抗动载能力评估[J]. 工程力学, 2012, 29(sup1):119-123.  
Zhou J N, Fan H L, Jin F N, et al. Residual dynamic resistance assessment of seismic damaged underground arch under non-uniform explosion loading [J]. Engineering Mechanics, 2012, 29(sup1):119-123. (in Chinese)
- [9] Chen H, Zhou J, Fan H, et al. Dynamic responses of buried arch structure subjected to subsurface localized impulsive loading: Experimental study [J]. International Journal of Impact Engineering, 2014, 65: 89-101.
- [10] 李平. 圆拱直墙式隧道的内力分析[D]. 西安:西安建筑科技大学, 2009.
- [11] 关宝树. 隧道力学概论[M]. 成都:西南交通大学出版社, 1993.
- [12] 王海彦,密荣三,骆宪龙. 地下结构设计的荷载、模型、方法的确定[J]. 石家庄铁路职业技术学院学报, 2007, 6(3): 5-10.  
Wang H Y, Mi R S, Luo X L. On the essentials of underground structure design[J]. Journal Shijiazhuang Institute of Railway Technology, 2007, 6(3): 5-10. (in Chinese)
- [13] 龙驭球,包世华. 结构力学. I. 基本教程[M]. 北京:高等教育出版社, 2006.
- [14] 过镇海. 钢筋混凝土原理[M]. 北京:清华大学出版社, 1999.

(编辑 胡玲)