



三维应力计的工作原理及误差分析

张宏^{1,2}, 李顺群³, 张少峰³, 冯慧强³

(1. 内蒙古大学交通学院, 呼和浩特 010070; 2. 内蒙古自治区桥梁检测与维修加固工程技术研究中心, 呼和浩特 010070; 3. 天津城建大学土木工程学院, 天津 300384)

摘要: 常规应力状态由3个正应力和3个剪应力共6个分量组成, 因此, 确定一点的应力状态至少需要6个单向应力计。基于三维应力状态理论, 以单向应力计或压力计为基本元件, 设计了一种能测试受力体内部三维应力状态的装置。该测试装置由6个单向应力计组成, 且应力计的轴线构成四面体的6个棱。考虑测试装置对稳定性、合理性、便利性等技术要求, 该四面体的形状可以设计为正四面体和由正方体截取的正三棱锥。根据某一方向上正应力与常规应力状态表示方法中6个应力分量之间的关系, 建立了三维应力计各分量与常规应力分量之间的映射关系, 并进一步导出了由三维应力计计算常规应力状态的方法及产生误差的原因。

关键词: 饱和土; 分数导数; 地震波; 地震放大系数; 液固耦合系数

中图分类号: TU441.33 **文献标志码:** A **文章编号:** 1674-4764(2015)05-0054-06

Principle and errors analysis of the three-dimensional stress apparatuses

Zhang Hong^{1,2}, Li Shunqun³, Zhang Shaofeng³, Feng Huiqiang³

(1. College of Transportation, Inner Mongolia University, Hohhot 010070, P. R. China; 2. The Engineering Research Center of Bridge Inspection and Maintenance and Reinforcement of Inner Mongolia, Huhhot 010070, P. R. China; 3. School of Civil Engineering, Tianjin Chengjian University, Tianjin 300384, P. R. China)

Abstract: The traditional stress state is composed of two normal stresses and a shear stress in the two dimensional space, and three normal stresses and three shear stresses in the three dimensional space. Therefore, six stressometers at least are necessary to determine the stress state at a point in space. Based on the stress state theory, a stress apparatus that can detector the three dimensional stress states is devised. The apparatus is made up of six one-way stressometers which are disposed at the edges of a tetrahedron. The tetrahedron is regular of all even arbitrary shaped in theory considering rational, logical, stability and conveniently. The mapping transformation, from the traditional stress state to the stress state illustrated by the edges of the tetrahedron is constructed. Furthermore, the traditional stress state can be derived from the data collected by the three-dimensional stress apparatus, and causes of errors are

收稿日期: 2015-04-25

基金项目: 国家自然科学基金(51178290、51468047)

作者简介: 张宏(1978-), 男, 副教授, 博士, 主要从事岩土工程及路基研究, (E-mail) zhanghong3537@126.com.

Received: 2015-04-25

Foundation item: National Natural Science Foundation of China(No. 51178290, 51468047)

Author brief: Zhang Hong(1978-), associate professor, PhD, main research interest: geotechnical engineering, (E-mail) zhanghong3537@126.com.

analyzed.

Key words: civil engineering; stress state theory; regular tetrahedron; three-dimensional stress apparatus; transition matrix

钢材、混凝土、岩土材料等在低应力状态下可以认为其力学性质是线性的,但在稍高应力状态下则往往表现出强烈的非线性和非均匀性^[1-2]。因此,工程材料在某一外界条件下的变形、屈服、流变等力学性能不仅取决于其本身的物质组成,还依赖于其所处的应力水平^[3-5]。所以,准确测试、认识工程材料当前的应力状态对正确认识其变形特征和工作状态,进行工程健康诊断和维修加固等工作具有重要意义^[6-8]。

目前,物体表面或内部某点的单向应力测试技术比较成熟。常用方法是在被测物体表面某一确定方向上布置直接测试元件或间接测试元件。直接测试元件包括钢筋计、应力计等;间接测试(通过应变换算应力)元件包括各类应变片。

一点的空间应力状态包含 3 个正应力和 3 个剪应力共 6 个分量。多数材料的物理力学性质必须在三维条件下研究才更具工程价值和理论意义^[9-12]。比如,混凝土在拉扭剪或三向压缩作用下的应力状态研究;岩土在三向轴力作用下的变形特性研究等,均较单向受力更具普遍性,也更为复杂^[13-16]。而进行三维应力状态测试,则是开展上述研究的基础性工作。

现有的只测试某一确定方向上主应力的方法至少存在两方面的弊病。一是大主应力方向多数情况下是不明确的,从而直接导致按最大主应力方向布置应力计的方法存在一定的主观性。二是材料的强度、变形、屈服等性质与 6 个应力分量都有关系而不仅仅依赖于最大正应力。因此,在工程中仅仅谋求测试最大正应力的方法往往是片面的。

基于三维应力状态理论,以电阻应变片为基本元件,设计了一种能测试受力体内部三维应力状态的装置——三维应力计。该测试装置由 6 个布置在某一四面体 6 条棱上的单向应力计或电阻应变片组成。根据某一方向上正应力与常规应力状态 6 个应力分量之间的关系,建立了三维应力计各分量与常规应力分量之间的关系,并进一步导出了由三维应力计计算常规应力状态的方法。

1 三维应力计的结构形式

平面应力状态包括 2 个正应力和 1 个剪应力,

如图 1(a)所示。

平面应力状态的数学表达式为

$$\sigma = \{\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_{xy}\} \quad (1)$$

三维应力状态包含 3 个正应力和 3 个剪应力,如图 1(b)所示。其数学表达式为

$$\sigma_{ij} = \begin{Bmatrix} \sigma_x & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_y & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_z \end{Bmatrix} \quad (2)$$

式中: $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}, \sigma_{xz} = \sigma_{zx}, \sigma_{yz} = \sigma_{zy}$,即 3 个正应力和 3 个剪应力共 6 个分量可以完整刻画一点的应力状态。因此,要想测得一点的应力状态,需要测得 6 个应力分量,也即需要 6 个普通应力计。最直观、最简单的一种三维应力计可以设计为图 2 所示的结构形式。

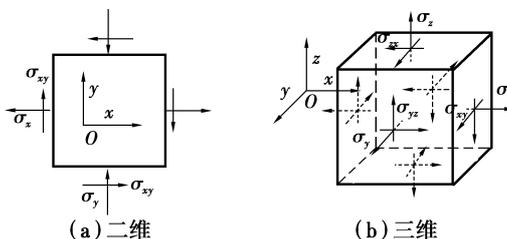


图 1 一点应力状态的常规表示方法

Fig. 1 The common expression of stress state at a point

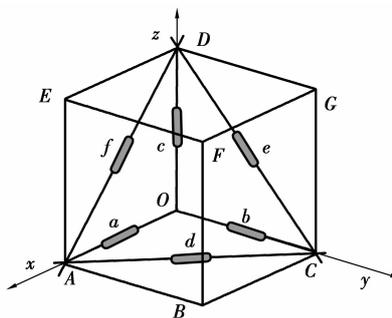


图 2 直角式三维应力计的结构组成

Fig. 2 The structure of the right-angle three dimensional stress apparatus

在图 2 中, $OABC-DEFG$ 为正六面体, $OACD$ 为其一角。在相互垂直的 3 个方向 OA, OC 和 OD 上可以布置 3 个应力计 a, b 和 c ,在 AC, CD 和 AD 方向布置另外 3 个应力计 d, e 和 f 。这 6 个应力计分布在不同的方向上,因此可以测得该点 6 个不同

方向上的正应力,并进一步可以得到该点基于常规应力状态表示方法的三维应力状态。

另外一种三维应力计的结构形式是基于正四面体的,即在正四面体 $OABC$ 的六条棱上布置测试元件,如图 3 所示。与图 2 相比,图 3 所示的正四面体结构更为稳定,且 6 个应力计均处于同等位置。因此,无论从骨架的稳定性方面考虑,还是从现场操作的便利性讲,正四面体应力计更为合理。

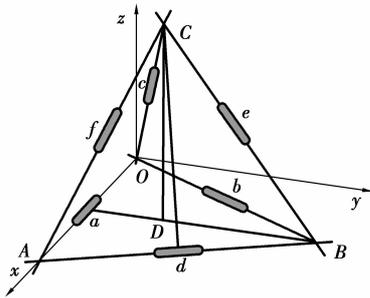
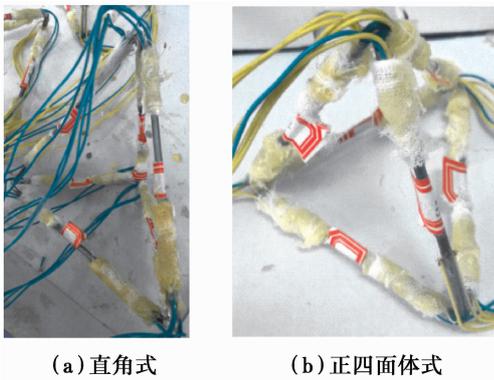


图 3 正四面体式三维应力计的结构组成

Fig. 3 The structure of the regular tetrahedron three dimensional stress apparatus

图 4 为 2 种应力计的实物照片。为了保证各测试单元之间的相对角度在施工过程中保持稳定,各交叉点处以塑料球铰相联。塑料球铰有一定刚度但强度较低。它的使用即起到了固定各测试单元的作用,又能保证在较高应力状态时自动失去联结作用从而确保各测试单元在不受其他测试单元干扰的情况下独自变形。



(a) 直角式 (b) 正四面体式

图 4 2 种三维应力计的实物照片

Fig. 4 The photos of the three dimensional stress apparatuses

2 三维应力计的工作原理

如前所述,只要能测得某点 6 个不同方向上的正应力分量,就可以得到该点的应力状态。因此,像

二维应力计可以有多种结构形式一样,三维应力计的结构形式也可以是多种多样的,而不仅仅限于图 2 和图 3 这 2 种特殊形式。但是,不难看出,这 2 种三维应力计最为合理、简单、实用。首先研究一般形式的三维应力计计算方法,再进一步给出图 2 和图 3 这 2 种特殊三维应力计的计算方法。

在三维空间中,假设某应力测试元件设置在 OA 方向,如图 5 所示。则 OA 在 x, y, z 3 个坐标轴方向上的投影 l, m, n 分别为

$$l = \sin\delta\cos\varphi \quad (3)$$

$$m = \sin\delta\sin\varphi \quad (4)$$

$$n = \cos\delta \quad (5)$$

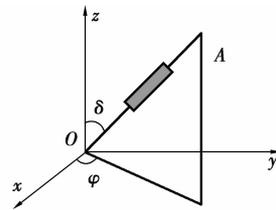


图 5 测试元件在三维空间中的方向余弦

Fig. 5 The direction cosine for a stress gauge

式中: δ 为测试元件所在直线与 z 轴的夹角, φ 为该直线在平面 xOy 上的投影与 x 轴的夹角,这里将它们通称为方位角。若已知一点的应力状态为 σ_{ij} (式 (2)),则 OA 方向的正应力为

$$\sigma_n = \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2\sigma_{xy} lm + 2\sigma_{yz} mn + 2\sigma_{zx} nl \quad (6)$$

也就是说,给定一点的应力状态,则任意方向上的正应力均可以由式(6)得到。设 6 个不同方向上的正应力 σ_k 为

$$\sigma_k = \sigma_x l_k^2 + \sigma_y m_k^2 + \sigma_z n_k^2 + 2\sigma_{xy} l_k m_k + 2\sigma_{yz} m_k n_k + 2\sigma_{zx} n_k l_k \quad (7)$$

式中: $k=1, 2, 3, 4, 5, 6$ 。进一步,可以将式(7)写成矩阵形式,即

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} l_1^2 & m_1^2 & n_1^2 & 2l_1 m_1 & 2m_1 n_1 & 2n_1 l_1 \\ l_2^2 & m_2^2 & n_2^2 & 2l_2 m_2 & 2m_2 n_2 & 2n_2 l_2 \\ l_3^2 & m_3^2 & n_3^2 & 2l_3 m_3 & 2m_3 n_3 & 2n_3 l_3 \\ l_4^2 & m_4^2 & n_4^2 & 2l_4 m_4 & 2m_4 n_4 & 2n_4 l_4 \\ l_5^2 & m_5^2 & n_5^2 & 2l_5 m_5 & 2m_5 n_5 & 2n_5 l_5 \\ l_6^2 & m_6^2 & n_6^2 & 2l_6 m_6 & 2m_6 n_6 & 2n_6 l_6 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{Bmatrix} \quad (8)$$

或

$$\{\sigma_k\} = \mathbf{T}\{\sigma_j\} \quad (9)$$

式中: $j=x, y, z, xy, yz, zx$,而

$$\mathbf{T} = \begin{Bmatrix} l_1^2 & m_1^2 & n_1^2 & 2l_1m_1 & 2m_1n_1 & 2n_1l_1 \\ l_2^2 & m_2^2 & n_2^2 & 2l_2m_2 & 2m_2n_2 & 2n_2l_2 \\ l_3^2 & m_3^2 & n_3^2 & 2l_3m_3 & 2m_3n_3 & 2n_3l_3 \\ l_4^2 & m_4^2 & n_4^2 & 2l_4m_4 & 2m_4n_4 & 2n_4l_4 \\ l_5^2 & m_5^2 & n_5^2 & 2l_5m_5 & 2m_5n_5 & 2n_5l_5 \\ l_6^2 & m_6^2 & n_6^2 & 2l_6m_6 & 2m_6n_6 & 2n_6l_6 \end{Bmatrix} \quad (10)$$

因此

$$\{\sigma_j\} = \mathbf{T}^{-1} \{\sigma_k\} \quad (11)$$

对于图 2 所示的直角式布置方案,各应力测试元件的方向余弦如表 1 所示。

表 1 直角式三维应力计各测试元件的方向余弦

Table 1 The direction cosine of stress gauges for the right angle three dimensional stress apparatus

应变片	l	m	n
a	1	0	0
b	0	1	0
c	0	0	1
d	-0.707	0.707	0
e	0	0.707	-0.707
f	0.707	0	-0.707

因此,根据式(10)可以得到

$$\mathbf{T} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & -1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & -1 \end{Bmatrix} \quad (12)$$

$$\mathbf{T} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.250 & 0.750 & 0 & 0.866 & 0 & 0 \\ 0.250 & 0.084 & 0.666 & 0.289 & -0.472 & -0.816 \\ 0.250 & 0.750 & 0 & -0.866 & 0 & 0 \\ 0 & 0.334 & 0.666 & 0 & -0.943 & 0 \\ 0.250 & 0.084 & 0.666 & -0.289 & -0.472 & 0.816 \end{Bmatrix} \quad (14)$$

对应的逆阵为

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.333 & 0.667 & 0 & 0.667 & 0 & 0 \\ -0.835 & 0.167 & 1.503 & 0.167 & -1.505 & 1.503 \\ 0 & 0.577 & 0 & -0.577 & 0 & 0 \\ -0.708 & 0.354 & 1.062 & 0.354 & -2.123 & 1.062 \\ 0 & 0.205 & -0.613 & -0.205 & 0 & 0.613 \end{Bmatrix} \quad (15)$$

矩阵 \mathbf{T} 存在逆阵的条件是其秩等于 6,即

$$r(\mathbf{T}) = 6 \quad (16)$$

因此,组成三维应力计的 6 个测试元件,其布置

进一步可以得到

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & -1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & -1 \end{Bmatrix} \quad (13)$$

2.2 正四面体式三维应力计

类似于直角式三维应力计各测试元件一样,正四面体式三维应力计各测试元件的方位角和方向余弦同样可以得到,其结果如表 2 所示。

表 2 正四面体式三维应力计各测试元件的方向余弦

Table 2 The direction cosine of stress gauges for the regular tetrahedron three dimensional stress apparatus

应变片	$\delta /(^{\circ})$	$\varphi /(^{\circ})$	l	m	n
a	90	0	1.0	0.000	0
b	90	60	0.5	0.866	0
c	144.7	30	0.5	0.289	-0.816
d	90	120	-0.5	0.866	0
e	144.7	90	0.0	0.578	-0.816
f	144.7	150	-0.5	0.289	-0.816

同样,根据式(10)可以得到

方法不是随意的,而应满足式(16)的限定条件。在构造其他结构形式的三维应力计时,必须核对是否满足这一基本要求。

3 两种三维应力计的误差估计

一般认为,误差包括系统误差和偶然误差两种。由三维应力计的制作过程产生的、对测试结果有稳定影响的误差称为系统误差。在使用过程中,由于偶然因素产生的呈正态规律分布的误差称为偶然误差。系统误差产生的原因主要包括以下几个方面:1)3个测试元件的轴线难以绝对交汇于一点;2)6条棱的长度存在误差从而影响测试元件之间的角度;3)4个塑料球铰的物理力学性能存在必然的差异性;4)4个塑料球铰与测试元件的联结也必然存在差异等。

设 T^{-1} 的第 j 个行向量为 r_j , 即

$$r_j = \{r_{j1} \ r_{j2} \ r_{j3} \ r_{j4} \ r_{j5} \ r_{j6}\} \quad (17)$$

则根据式(11)可以得到 σ_j 的系统误差 $\Delta\sigma_j$ 为

$$\Delta\sigma_j = \sum_{i=1}^6 r_{ji} \Delta\sigma_i = r_{j1} \Delta\sigma_1 + r_{j2} \Delta\sigma_2 + \dots + r_{j5} \Delta\sigma_5 + r_{j6} \Delta\sigma_6 \quad (18)$$

式中: $\Delta\sigma_k$ 为第 k 个测试元件的系统误差。为了缩小系统误差对三维应力计测试结果的影响,应针对以上引起系统误差的原因进行三维应力计制作过程中的质量控制。另外,三维应力计放置位置和放置角度的准确性,也会引起系统误差。

当然,由三维应力计获得的 6 个常规应力分量参数与真值之间也会存在偶然误差。若第 k 个测试元件读数 σ_k 的标准差为 δ_k , 则第 j 个待测应力分量 σ_j 的标准差 δ_j 为

$$\delta_j = \text{sqrt} \sum_{k=1}^6 r_{jk}^2 \delta_k^2 \quad (19)$$

若 6 个测试元件的标准差均等于 δ_0 , 则

$$\delta_j = \delta_0 \times \text{sqrt} \sum_{k=1}^6 r_{jk}^2 \quad (20)$$

因此,要想获得较高精度,应使 $\sum_{k=1}^6 r_{jk}^2$ 最小。所以,对于图 2 所示的布置方式,各待测应力分量的标准差为

$$\delta_j = \{1 \ 1 \ 1 \ 1.5 \ 1.5 \ 1.5\} \delta_0 \quad (21)$$

对于图 3 所示布置方式,各待测应力分量的标准差为

$$\delta_j = \{1 \ 1 \ 7.536 \ 0.666 \ 7.515 \ 0.836\} \delta_0 \quad (22)$$

可见,三维应力计的结构布置方式和测试时的放置角度,都会影响测试结果的误差大小。与图 2 所示的布置方式和放置方位相比,图 3 所示测试方

法的误差稍大。当某一测试元件与某一待测方向重合或测试元件对称时,该方向上的应力测试值将逼近于真值,也即偶然误差较小;相反,当某一待测值方向均斜交于各测试元件时,偶然误差最大。

4 结 论

基于三维应力状态理论,设计了一种能测试受力体内部三维应力状态的装置——三维应力计。该测试装置由 6 个单向测试元件组成,且各测试元件的轴线构成四面体的 6 条棱。根据某一方向上正应力与常规应力状态表示方法之间的关系,建立了三维应力计各分量与常规应力分量之间的关系,并进一步导出了由三维应力计计算常规应力状态的方法。最后,对该装置产生系统误差和偶然误差的原因进行了分析和计算,并进一步指出了减小误差的路径和方法。

参考文献:

[1] 孙红, 赵锡宏. 软土初始损伤门槛值的真三轴试验研究[J]. 水利学报, 2002(7): 93-97.
Sun H, Zhao X R. Study on initial damage threshold of soft soil by true triaxial tests [J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2002 (7): 93-97. (in Chinese)

[2] 张斌, 郭万林. 考虑闭合效应和三维应力约束的表面裂纹扩展模拟[J]. 计算力学学报, 2005, 22(6): 716-721.
Zhang B, Guo W L. Numerical simulation of surface crack propagation considering the crack closure effects and the three-dimensional stress constraints [J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2005, 22 (6): 716-721. (in Chinese)

[3] 王瑞瑞. 真三维应力状态下重塑黄土变形强度特性的试验研究[D]. 陕西: 西北农林大学, 2010.

[4] 邢义川, 谢定义, 汪小刚, 等. 非饱和黄土的三维有效应力[J]. 岩土工程学报, 2003, 3(5): 288-293.
Xing Y C, Xie D Y, Wang X G, et al. 3D effective stress of unsaturated loess [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2003, 3(5): 288-293. (in Chinese)

[5] 黄茂松, 柳艳华. 天然软黏土屈服特性及主应力轴旋转效应的本构模拟[J]. 岩土工程学报, 2011, 33(11): 1667-1675.
Huang M S, Liu Y H. Simulation of yield characteristics and principle stress rotation effects of natural soft clay [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2011, 33(11): 1667-1675. (in Chinese)

- [6] 陈志平, 曾明, 余维麟, 等. 大型油罐应力分析与屈曲稳定性研究[J]. 油气储运, 2008, 27(12): 7-12, 46.
Chen Z P, Zeng M, Yu C L, et al. A research on stress analysis and bulking reliability of large oil storage tank [J]. Oil & Gas Storage and Transportation, 2008, 27(12): 7-12, 46. (in Chinese)
- [7] 应宏伟, 杨晓刚, 卞守中, 等. 大型油罐地基现场试验分析[J]. 岩土工程学报, 2005, 27(2): 157-161.
Ying H W, Yang X G, Bian S Z, et al. Analysis of field test on foundation of a large oil tank [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2005, 27(2): 157-161. (in Chinese)
- [8] Chen Z P, Duan Y Y, Shen J M. A simplified method for calculating the stress of a large storage tank wall [J]. Journal of Process Mechanical Engineering, 2007, 221(3): 119-127.
- [9] 周博, 陈善雄, 余飞, 等. 膨胀土膨胀力原位测试方法[J]. 岩土力学, 2008, 29(12): 3333-3336.
Zhou B, Chen S X, Yu F, et al. An in-situ testing method of swelling pressure on expansive soils [J]. Rock and Soil Mechanics, 2008, 29(12): 3333-3336. (in Chinese)
- [10] 刘元雪, 郑颖人, 陈正汉. 含主应力轴旋转的土体一般应力应变关系[J]. 应用数学和力学, 1998, (5): 407-413.
Liu Y X, Zheng Y R, Chen Z H. The general stress strain relation of soil involving the rotation of principal stress axes [J]. Applied Mathematics and Mechanics, 1998, 19(5): 407-413. (in Chinese)
- [11] 张宁, 赵阳升, 万志军, 等. 高温三维应力下花岗岩三维蠕变的模型研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2009, Zhang N, Zhao Y S, Wan Z Y, et al. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering [J]. 2009, 28(5): 875-881. (in Chinese)
- [12] 李云安, 葛修润, 糜崇蓉, 等. 岩-土-混凝土破坏准则及其强度参数估算[J]. 岩石力学与工程学报, 2004, 23(5): 770-776.
L Y A, Ge X R, Mi C R, et al. Failure criteria of rock-soil-concrete and estimation of their strength parameters [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2004, 23(5): 770-776. (in Chinese)
- [13] 蒋明镜, 孙渝刚, 李立青. 复杂应力下两种胶结颗粒微观力学模型的试验研究[J]. 岩土工程学报, 2011, 33(3): 354-360.
Jiang M J, Sun Y G, Li L Q. Experimental study on micro-mechanical model for two different bonded granules under complex stress conditions [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2011, 33(3): 354-360. (in Chinese)
- [14] Ma H W. Seismic analysis for wind turbines including soil structure interaction combining vertical and horizontal earthquake [C]//Proceedings of 15th World Conference on Earthquake Engineering, Lisbon, Portugal, 2012: 336-345
- [15] 师访, 高峰, 杨玉贵. 正交各向异性岩体裂纹扩展的扩展有限元方法研究[J]. 岩土力学, 2014, 35(4): 1203-1210.
Shi F, Gao F, Yang Y G. Application of extended finite element method to study crack propagation problems of orthotropic rock mass [J]. Rock and Soil Mechanics, 2014, 35(4): 1203-1210. (in Chinese)
- [16] 田洪铭, 陈卫忠, 郑朋强, 等. 考虑流变效应的高地应力软岩隧道断面形态优化研究[J]. 岩土力学, 2013, (Sup2): 265-271.
Tian H M, Chen W Z, Zheng P Q, et al. Study of section optimization for high in-situ stress soft rock tunnel considering rheological effect [J]. Rock and Soil Mechanics, 2013(Sup2): 265-271. (in Chinese)

(编辑 郭飞)