

doi:10.11835/j.issn.1674-4764.2016.02.004



一维稳态流非饱和土渗透系数垂直分布模型 及其线性简化

程大伟^{1a,b}, 陈茜², 安鹏^{1c}, 郭鸿², 郑睿^{1a}

(1. 长安大学 a. 环境科学与工程学院; b. 旱区地下水文与生态效应教育部重点实验室;
c. 地质工程与测绘学院, 西安 710000; 2. 陕西理工学院 土木工程与建筑学院, 陕西 汉中 723001)

摘要:渗透系数是控制地下水流动的重要参数,对渗透系数的空间分布规律进行研究具有重要的意义。基于 Gardner 模型获取了一维稳态流非饱和土渗透系数沿垂直分布模型,该模型用指数函数描述,受饱和渗透系数和无量纲的深度与流动率等因素的控制;该模型表明一维稳态流条件下均质典型土类的渗透系数其沿垂直方向变化趋势主要受比流量与饱和渗透系数的负数值二者之间的相对大小影响。分别采用泰勒级数方法和以地下水位处及地表处的渗透系数作为控制条件方法对一维稳态流非饱和土渗透系数沿垂直分布模型进行线性近似简化。采用泰勒级数方法获取的简化模型其计算误差随无量纲的深度增大而增大。简化后的模型具有形式简单、参数少等特点。通过算例对比简化模型与原模型的差异,计算结果表明:采用以地下水位处及地表处的渗透系数作为控制条件的方法进行线性近似简化的模型计算误差比采用泰勒级数方法获得的线性近似简化模型的计算误差小。

关键词:一维稳态流;渗透系数;垂直分布;简化模型

中图分类号: TU435 文献标志码: A 文章编号: 1674-4764(2016)02-0029-06

Permeability coefficient vertical distribution model and it's linear simplified models of unsaturated soil under unidimensional steady flow condition

Cheng Dawei^{1a,b}, Chen Xi², An Peng^{1c}, Guo Hong², Zheng Rui^{1a}

(1a. School of Environmental Science and Engineering; 1b. Key Laboratory of Subsurface Hydrology and Ecological Effect in Arid Region of Ministry of Education; 1c. School of Geology Engineering and Geomatics, Chang'an University, Xi'an 710000, P. R. China; 2. School of Civil Engineering and Architecture, Shaanxi University of Technology, Hanzhong 723001, Shaanxi, P. R. China)

Abstract: The permeability coefficient is important to investigate permeability coefficient spatial distribution of groundwater flow. Based on Gardner model, the permeability coefficient vertical distribution model is established, expressed as exponential, which is controlled by saturation permeability coefficient, dimensionless depth and dimensionless flow rate. The model shows that the permeability coefficient vertical

收稿日期: 2015-10-23

基金项目: 国家自然科学基金(41230314); 中央高校基本科研业务费(310829151076)

作者简介: 程大伟(1984-), 男, 博士, 主要从事非饱和土相关理论研究, (E-mail)250446719@qq.com。

Received: 2015-10-23

Foundation item: National Natural Science Foundation of China (No. 41230314); Basic Scientific Research Foundation of Central University (No. 310829151076)

Author brief: Cheng Dawei(1984-), PhD, main research interest: the theory of unsaturated soil, (E-mail)250446719@qq.com.

distribution for homogeneous typical soils is influenced by the difference between flow rate and aturation permeability coefficient. And then, simplifies the model is simplified as linear model based on Taylor's series and permeability coefficient of groundwater level and the earth's surface as control conditions. The error of linear model with the method of Taylor's series increases when dimensionless depth increases. The calculation results of the simplified model and the original model are compared. The result shows that the linear model with the method of permeability coefficient of groundwater level and the earth's surface as control conditions is more accurate than the linear model with the method of Taylor's series.

Keywords: unidimensional steady flow; permeability coefficient; vertical distribution; simplified model

非饱和土的渗透系数是控制土层中水分和污染物迁移的重要参数之一^[1]。试验获取渗透系数的方法分为稳态方法和非稳态方法的瞬时截面法^[2]。渗透试验的测试结果表明,渗透系数对饱和度的依赖性较大^[3],在低饱和度时,渗透系数的测试非常困难。采用经验公式和理论预测的方式确定非饱和土的渗透系数往往是较为理想的选择。为此,许多学者对此进行过探讨,并提出了一些非饱和土渗透系数的经验公式或是尝试经验预测非饱和土的渗透性函数^[4-7]。

渗透系数的空间分布与许多岩土工程问题有关,如入渗或蒸发条件下所引起的岩土质边坡稳定^[8-10]以及堤坝稳定性分析^[11]、污染物入渗运移^[12-13]等。本文拟以渗透函数 Gardner 模型为基础获得一维稳态流非饱和土渗透系数沿垂直方向分布模型,并对该模型进行简化,使其简洁易用。

1 一维稳态流均质非饱和土渗透系数沿垂直分布模型

很多模型可以用来研究渗透系数对基质吸力的依赖特征。其中 Gardner 模型^[14]广泛应用于求解非饱和和流动的解析解,该模型可表达为:

$$k = k_s e^{-\alpha(u_a - u_w)} \quad (1)$$

式中: k 为渗透系数; k_s 为饱和土渗透系数,对于均质土 k_s 为一单值,与位置无关; α 为土水特征曲线拟合参数,又称为孔径分布参数, kPa^{-1} ; $(u_a - u_w)$ 为基质吸力。

在稳定状态下,垂直非饱和流动可用达西定律进行描述,并依照惯例规定水流向下运动为负号,向上运动为正号,因此,垂直方向的比流量为

$$q = -k \left[\frac{d(u_w - u_a)}{\gamma_w dy} + 1 \right] \quad (2)$$

式中: q 为比流量; γ_w 为水的容重; y 为垂直方向距地下水水位处的距离,取地下水水位处 $y=0$,地下水水位以上为正。

利用边界条件,在地下水水位处($y=0$)基质吸力为 0,并结合式(1),可得基质吸力沿 y 方向分布模型^[15]

$$\alpha(u_a - u_w) = -\ln \left[\left(1 + \frac{q}{k_s} \right) e^{-\alpha \gamma_w y} - \frac{q}{k_s} \right] \quad (3)$$

式中: e 是自然常数。

将式(3)代入式(1),即可获得一维稳态流非饱和土渗透系数沿垂直分布模型,如式(4)所示。

$$k_{wy} = k = k_s e^{\ln \left[\left(1 + \frac{q}{k_s} \right) e^{-\alpha \gamma_w y} - \frac{q}{k_s} \right]} = k_s \left[\left(1 + \frac{q}{k_s} \right) e^{-\alpha \gamma_w y} - \frac{q}{k_s} \right] \quad (4)$$

式中: k_{wy} 为沿垂直方向(y 方向)分布的渗透系数。

式(4)表明,一维稳态流非饱和土渗透系数 k_{wy} 沿垂直方向(y 方向)分布受饱和渗透系数 k_s 和无量纲的深度 $\alpha \gamma_w y$ 与流动率 q/k_s 等因素的控制。

进一步地,可以对入渗或蒸发条件下均质典型土类(砂土、粉土和粘土)的渗透系数 k_{wy} 沿垂直方向(y 方向)分布规律的变化趋势进行讨论。

如前所述,对于均质土其饱和渗透系数 k_s 是一单值,即与位置无关; q 是比流量,在一维稳态流条件下其值与位置无关; α 为土水特征曲线拟合参数, γ_w 为水的容重,此二者也与位置无关。

对式(4)求取一阶导数,有

$$\frac{dk_{wy}}{dy} = -\alpha \gamma_w k_s \left(1 + \frac{q}{k_s} \right) e^{-\alpha \gamma_w y} \quad (5)$$

式(5)的驻点应满足

$$\frac{dk_{wy}}{dy} = -\alpha \gamma_w k_s \left(1 + \frac{q}{k_s} \right) e^{-\alpha \gamma_w y} = 0 \quad (6)$$

对于砂土、粉土和粘土的典型水文参数如表 1^[15] 所示。

表1 砂土、粉土和粘土的典型水文参数

Table 1 the typical hydraulic parameters of sand silt and clay

土的类型	α/Pa^{-1}	$k_s/(\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$
砂土	$10^{-4} \sim 5 \times 10^{-4}$	$10^{-5} \sim 10^{-2}$
粉土	$10^{-5} \sim 10^{-4}$	$10^{-9} \sim 10^{-6}$
粘土	$10^{-6} \sim 10^{-5}$	$10^{-13} \sim 10^{-8}$

如表1所示,典型土类的土水特征曲线拟合参数 α 和饱和土渗透系数 k_s 均大于0。同时,考虑到 $e^{-\alpha\gamma_w y}$ 恒大于零,因此,式(5)的驻点存在的条件是

$$1 + \frac{q}{k_s} = 0 \quad \text{或} \quad q = -k_s \quad (7)$$

对于式(3)而言,比流量 q 与渗透系数 k_s 之间存在如式(8)所示关系。

$$-k_s \leq q \leq k_s \quad (8)$$

当 $q \geq -k_s$ 时,有。

$$\frac{dk_{wy}}{dy} \leq 0 \quad (9)$$

式(7)~(9)表明:对于一维稳态流条件下均质典型土类的渗透系数 k_{wy} 而言,其沿垂直方向(y 方向)变化趋势主要受比流量 q 与饱和渗透系数 k_s 的负数值之间的相对大小影响,而与位置无关。值得注意的是,按照惯例规定水流向下运动取负号,水流运动向上运动取正号,同时考虑到典型土类的饱和土渗透系数 k_s 其值大于0,因此,对于一维稳态流均质非饱和土可以得到如下结论:

1)若为蒸发条件,恒有 $0 < q \leq k_s$,渗透系数 k_{wy} 沿垂直方向(y 方向)单调递减;

2)若为入渗条件,当满足 $-k_s < q \leq 0$,渗透系数 k_{wy} 沿垂直方向(y 方向)单调递减;

3)若为入渗条件,当满足 $q = -k_s$,渗透系数 k_{wy} 沿垂直方向(y 方向)保持不变,即为饱和渗透系数 k_s 。

2 一维稳态流非饱和土渗透系数沿垂直分布模型的简化

一维稳态流非饱和土渗透系数 k_{wy} 沿垂直方向分布,如式(4)所示,为非线性函数,涉及参数包括饱和土渗透系数 k_s 、土水特征曲线拟合参数 α 和比流量 q ,以下对式(4)进行近似简化。

对式(4)利用泰勒级数展开,可得

$$k_{wy} = k_s \left[\left(1 + \frac{q}{k_s} \right) e^{-\alpha\gamma_w y} - \frac{q}{k_s} \right] =$$

$$k_s \left[\left(1 + \frac{q}{k_s} \right) \left(1 + (-\alpha\gamma_w)y + \frac{(-\alpha\gamma_w)^2 y^2}{2!} + \dots + \frac{(-\alpha\gamma_w)^n y^n}{n!} + \dots \right) - \frac{q}{k_s} \right] \quad (9)$$

略去二阶及以上的高阶项,则有:

$$k_{wy} \approx k_s \left[\left(1 + \frac{q}{k_s} \right) (1 - \alpha\gamma_w y) - \frac{q}{k_s} \right] = k_s \left[1 - \alpha\gamma_w \left(1 + \frac{q}{k_s} \right) y \right] \quad (10)$$

式(10)表明,一维稳态流非饱和土渗透系数 k_{wy} 沿垂直方向分布可近似用线性函数表达,且始终过 $(0, k_s)$ 点。但简化模型式(10)的误差与无量纲的深度 $\alpha\gamma_w y$ 有关,随无量纲的深度 $\alpha\gamma_w y$ 增大,简化模型的误差增大。其次,经简化后的表达式形式上虽更为简洁,但涉及参数个数并未减小。

在保证近似后表达式的线性化和过 $(0, k_s)$ 点的特点的前提下,为获取误差较小且参数更少的简化模型,取地表处 $y=H$,设该处的渗透系数为 k_{wH} ,则渗透系数 k_{wy} 沿垂直方向分布必然经过 (H, k_{wH}) 点,故一维稳态流非饱和土渗透系数 k_{wy} 沿垂直方向分布还可以近似表达为

$$k_{wy} = k_s + \frac{k_{wH} - k_s}{H} y \quad (11)$$

式(11)所涉及的参数仅有两个:饱和渗透系数 k_s 和地表处土的渗透系数 k_{wH} 。该简化模型与原模型相比具有形式简单、参数少、参数易测量等特点。

若把地表处($y=H$)的基质吸力记为 $(u_a - u_w)_H$,并代入 Gardner 模型,则有

$$k_{wH} = k_s e^{[-\alpha(u_a - u_w)_H]} \quad (12)$$

将式(12)代入式(11),有

$$k_{wy} = k_s \left(1 + \frac{e^{[-\alpha(u_a - u_w)_H]} - 1}{H} y \right) \quad (13)$$

式(13)是采用地表处基质吸力记为 $(u_a - u_w)_H$ 和饱和渗透系数 k_s 为参数的一维稳态流非饱和土渗透系数垂直分布的线性近似简化模型。

对于不同的非饱和土其土性、土的密度、湿度和结构的变化均会引起渗透系数发生变化。当采用 Gardner 模型描述渗透性函数时,通过孔径分布参数 α 反映不同土性、土的密度和结构的变化带来的影响,因而简化模型式(13)与原模型式(4)能够反映土性、土的密度和结构的变化的影响。至于在一维稳态流条件下均质非饱和土土层内其湿度变化对非饱和土渗透系数影响则是通过垂直方向距地下水位

处的距离 y 的变化间接反映出来。原因在于,一维稳态流条件下均质非饱和土层内基质吸力随深度单调变化(一一对应关系)^[14],而在吸湿或脱湿条件下基质吸力与含水率亦呈单调变化(一一对应关系)^[2],因而,在一维稳态流条件下均质非饱和土层内深度与含水率之间具有一一对应的关系。在简化模型式(13)与原模型式(4)中正是利用这一关系通过垂直方向距地下水水位处的距离 y 的不同计算并反映土层内不同深度处湿度对非饱和土渗透系数的影响。

3 算例

利用前节所述方法,分别利用渗透系数沿垂直方向分布的简化模型和原模型计算粉土和粘土两种典型土类渗透系数并进行对比分析。计算土层是厚度为 10 m 的均质土层,土层中的地下水水位为 $y = 0$ m 位置处,地表处为 $y = 10$ m。所用水文参数引自文献[15],如表 2 所示。

表 2 水文参数

Table 2 Hydraulic parameters

土类	$k_s/(m \cdot s^{-1})$	α/kPa^{-1}	$q/(m \cdot s^{-1})$
粉土	1.0×10^{-7}	0.01	-3.14×10^{-8}
粘土	5.0×10^{-8}	0.005	-3.14×10^{-8}

注:表中 q 为正值表示蒸发。

采用简化模型和原模型分别对粉土、粘土的渗透系数进行计算,计算结果如图 1 所示。图中 R 表示式(4)计算结果,即原模型计算结果; $R1$ 表示式(10)计算结果,即对原模型利用泰勒级数进行线性近似简化后的计算结果; $R2$ 表示式(11)计算结果,即以地下水水位处和地表处的渗透系数作为控制条件进行线性近似简化后的计算结果。由图 1 可见,本算例中的粉土、粘土的渗透系数,其沿垂直方向分布趋势具有相似性,即自地下水水位处至地表处渗透系数均呈现出递减的趋势,其原因在于本算例中两种土类的比流量 $q = -3.14 \times 10^{-8}$ m/s 均比相应土类的饱和渗透系数的负值要大(粉土 $-k_s = -1.0 \times 10^{-7}$ m/s,粘土 $-k_s = -5.0 \times 10^{-8}$ m/s)。从图 1 中还可以看出,式(10)和式(11)的计算结果与式(4)计算结果在变化趋势上相似,但是式(11)的总体误差水平更小。

为进一步说明上述计算误差差异情况,图 2 给出了简化模型和原模型计算出的渗透系数之间的相

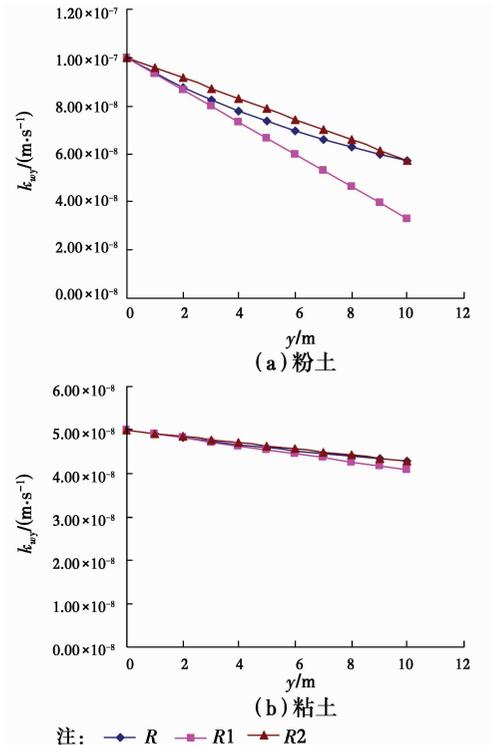


图 1 粉土、粘土的渗透系数计算结果对比

Fig. 1 the calculation comparing between linear model and original model of silt and clay

对误差随计算深度的分布规律。图 2 中 $E1$ 表示式(10)计算结果与式(4)计算结果之间的相对误差随垂直方向距离 y 的变化趋势, $E2$ 表示式(11)计算结果与式(4)计算结果之间的相对误差随垂直方向距离 y 的变化趋势。由图 2 可见,粉土和粘土的渗透系数采用式(10)计算时所产生的相对误差随垂直方向距离 y 的增大而增大,最大误差对于粉土为 -42.65% ,对于粘土为 -4.46% ,负号表示计算结果比式(4)要小;式(11)计算时所产生的相对误差随垂直方向距离 y 的增大呈先增大后递减的趋势,最大误差对于粉土为 7.01% ,对于粘土为 0.96% 。这说明一维稳态流均质非饱和土渗透系数 k_{wy} 沿垂直

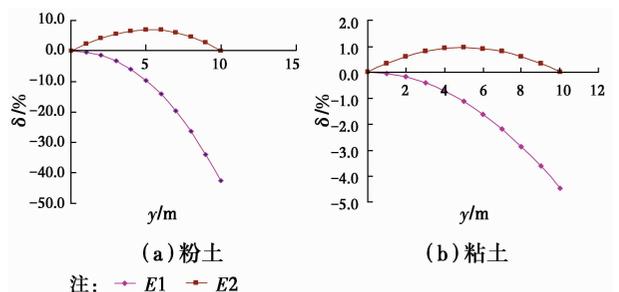


图 2 粉土、粘土两种模型计算值相对误差

Fig. 2 the relative error between linear model and original model of silt and clay

方向分布可以近似用线性简化模型描述,但从计算结果的相对误差来看,采用式(11),即以地下水位处和地表处的渗透系数作为控制条件进行线性近似简化的模型,计算结果产生的误差要小。

4 结 论

非饱和含水层渗透系数的空间分布规律一直是研究的热点和难点问题。本文基于 Gardner 模型获取了一维稳态流非饱和土渗透系数沿垂直分布模型,并分别采用泰勒级数方法和以地下水位处和地表处的渗透系数作为控制条件方法对模型进行线性简化。具体结论如下:

1)一维稳态流非饱和土渗透系数 k_{wy} 沿垂直方向(y 方向)分布规律可用指数函数描述,受饱和渗透系数 k_s 和无量纲的深度 $\alpha\gamma_w y$ 与流动率 q/k_s 等因素的控制。

2)对于一维稳态流条件下均质典型土类的渗透系数 k_{wy} 沿垂直方向(y 方向)单调递减。

3)一维稳态流非饱和土渗透系数 k_{wy} 沿垂直方向分布可用泰勒级数展开,可近似简化为线性模型表达,该线性简化模型的误差与无量纲的深度 $\alpha\gamma_w y$ 有关,随 $\alpha\gamma_w y$ 增大,该线性简化模型的误差增大;

4)一维稳态流非饱和土渗透系数 k_{wy} 沿垂直方向分布还可用以地下水位处和地表处的渗透系数作为控制条件进行线性近似简化,简化模型与原模型相比具有形式简单、参数少、参数易测量等特点。

5)从算例的计算结果来看,采用以地下水位处和地表处的渗透系数作为控制条件进行线性近似简化的模型计算误差要比采用泰勒级数方式获得的线性近似简化模型的计算误差要小。

参考文献:

- [1] 叶为民,钱丽鑫,白云,等. 由土-水特征曲线预测上海非饱和软土渗透系数[J]. 岩土工程学报,2005,27(11): 1262-1265.
YE W M, QIAN L X, BAI Y, et al. Predicting coefficient of permeability from soil-water characteristic curve for shanghai soft soil [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering,2005,27(11):1262-1265. (in Chinese)
- [2] FREDLUND D G, RAHARDIO H. 非饱和土土力学[M]. 陈仲颐,译. 北京:中国建筑工业出版社,1997.
FREDLUND D G, RAHARDIO H. Soil mechanics for unsaturated soils [M]. Trans. Chen Z Y. Beijing: China Building Industry Press,1997. (in Chinese)
- [3] 孙大松,刘鹏,夏小和,等. 非饱和土的渗透系数[J]. 水利学报,2004,(3):71-75.
SUN D S, LIU P, XIA X H, et al. Permeability coefficient of unsaturated soils [J]. Shuili Xuebao, 2004,(3):71-75. (in Chinese)
- [4] CAMPBELL J D. Pore pressures and volume changes in unsaturated soils [D]. Urbana-Champaign University of Illinois,1973.
- [5] MUALEM Y. Hydraulic conductivity of unsaturated soils: prediction and formulas [C]//Methods of Soil Analysis. Madison, Wis: American Society of Agronomy,Part 1,1986:799-823.
- [6] VANAPALLI S K, FREDLUND D G, PUF AHL D E. The influence of soil structure and stress history on the soil-water characteristics of a compacted till [J]. Geotechnique,1999,49(2):143-159.
- [7] GARDNER W R. Some steady state solutions of the unsaturated moisture flow equation with application to evaporation from a water table [J]. Soil Science,1958, 85(4):228-232.
- [8] 孔郁斐,宋二祥,杨军,等. 降雨入渗对非饱和土边坡稳定性的影响[J]. 土木建筑与环境工程,2013,35(6): 16-21.
KONG Y F, SONG E X, YANG J, et al. Rainfall's effect on the stability of unsaturated slopes [J]. Journal of Civil, Architectural & Environmental Engineering, 2013,35(6):16-21. (in Chinese)
- [9] 于玉贞,林鸿州,李荣建,等. 非稳定渗流条件下非饱和土边坡稳定分析[J]. 岩土力学,2008,29(11): 2892-2898.
YU Y Z, LIN H Z, LI R J, et al. Stability analysis of unsaturated soil slope under transient seepage flow state [J]. Rock and Soil Mechanics, 2008, 29(11): 2892-2898. (in Chinese)
- [10] LING H, LING H I. Centrifuge model simulations of rainfall-induced slope instability [J]. Journal of Geotechnical and Geo-environmental Engineering,2012, 138(9):1151-1157.
- [11] 李湛,栾茂田,刘占阁,等. 渗流作用下边坡稳定性分析的强度折减弹塑性有限元法[J]. 水利学报,2006,37(5):554-559.
LI Z, LUAN M T, LIU Z G, et al. Elasto-plastic FEM for embankment stability analysis under the condition of

- seepage based on the technique of shear strength reduction [J]. *Journal of Hydraulic Engineering*, 2006, 37(5):554-559. (in Chinese)
- [12] ERTAN D, CORAPCIOGLU M Y, TUNCAY K. Modeling of settlement in saturated and unsaturated municipal landfills [J]. *International Journal of Geomechanics*, ASCE, 2006:269-278.
- [13] 赵颖, 梁冰, 薛强, 等. 地表水入渗对垃圾填埋场水质水量影响的数值模拟分析[J]. *岩土力学*, 2010, 31(7): 2295-2302.
- ZHAO Y, LIANG B, XUE Q, et al. Numerical simulation analysis of effect of surface water infiltration on water quality and quantity in landfills [J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2010, 31(7):2295-2302. (in Chinese)
- [14] CHEN X H, SONG J X, WANG W K. Spatial variability of specific yield and vertical hydraulic conductivity in a highly permeable alluvial aquifer [J]. *Journal of Hydrology*, 2010, 388(3/4):379-388.
- [15] NING L, WILLIAM J L. 非饱和土力学[M]. 韦昌富. 译. 北京: 高等教育出版社, 2012.
- NING L, WILLIAM J L. *Unsaturated soil mechanics* [M]. Trans. Wei C F. Beijing: Higher Education Press, 2012.

(编辑 王秀玲)